

Bogusław GUZIK*

O PEWNEJ MOŻLIWOŚCI UWZGLĘDNIENIA SUBSTYTUCJI NAKŁADÓW W MODELACH DEA

W „klasycznych” wariantach metody DEA (np. CCR czy super-efiency DEA) nakłady są całkowicie komplementarne i nie ma ich substytucji. Bierze się to z tego, że mnożnik poziomu nakładów jest jednolity dla wszystkich nakładów. W artykule wskazano na możliwość uwzględniania substytucji nakładów poprzez wprowadzenie różnych mnożników dla różnych nakładów, co jest charakterystyczne dla tzw. non-radial (nieradialnej) DEA, opracowanej w swoim czasie przez Dysona i Thanassoulisa (1992). Zaproponowano prosty miernik substytucji, oparty na mnożnikach nakładów.

Słowa kluczowe: *Data Envelopment Analysis*, *substytucja nakładów*, *efektywność nie-radialna*

1. Wstęp

Metoda DEA jest chyba najpopularniejszą metodą ustalania efektywności względnej obiektów gospodarczych. Jak wiadomo, zaproponowali ją Charnes, Cooper i Rhodes [2]. Od tego czasu doczekała się wielu modyfikacji, rozwinięć oraz ogromnej liczby zastosowań¹. Można na przykład wymienić następujące główne ujęcia metody²:

1. CCR – Charnes, Cooper, Rhodes [2].
2. BCC – Banker, Charnes, Cooper [3].
3. CEM (*cross-efficiency model; efektywność krzyżowa*) – Sexton, Silkman, Hogan [14].
4. SE-DEA (*super-efficiency DEA; nad-efektywność DEA*) – Andersen, Petersen [1].

* Katedra Ekonometrii, Akademia Ekonomiczna, al. Niepodległości 10, 60-967 Poznań, e-mail: b.guzik@ae.poznan.pl

¹ Np. opracowana przez Tawaresa bibliografia metody DEA za lata 1978–2001 zawiera ponad 3000 pozycji [19].

² Szerzej omówiono je w artykule Sun, Lu [16].

5. CEP (*cross-efficiency profiling; profilowana efektywność krzyżowa*) – Doyle, Green [5], Tofallis [20].
6. SE-BCC (*super-efficiency BCC*) – Seiford, Zhu [15].
7. SE-SBM (*super-efficiency- slack-based measure; nadefektywność oparta na luzach*) – Tone [18].
8. NR-DEA (*non-radial DEA; nieradialna DEA*) – Thanassoulis, Dyson [17].

Metoda DEA w literaturze polskiej została zaprezentowana bodaj po raz pierwszy w pracach Rogowskiego [12], [13] oraz Gospodarowicza [7]. W chwili obecnej jej polska bibliografia jest już znacząca. Oprócz podanych prac Rogowskiego i Gospodarowicza obejmuje np. artykuły: Domagała [4], Feruś [6], Gospodarowicz (2004), Kopczewski [8], Kopczewski, Pawłowska [9], Pawłowska [10], Prędko (2002).

We wszystkich opublikowanych w naszym kraju znanych autorowi pracach dotyczących DEA – przynajmniej na etapie formułowania modelu – przyjmuje się, że nakłady są względem siebie całkowicie komplementarne i nie zachodzi zjawisko jakiegokolwiek ich substytucji. W niniejszym artykule wskazano na możliwość wykorzystania modelu nieradialnej DEA, w którym może mieć miejsce, przynajmniej częściowa, substytucja nakładów. Propozycja wydaje się istotnym uogólnieniem dotychczasowych ujęć metody DEA w kierunku szerszego uwzględnienia różnych okoliczności o naturze ekonomicznej i technologicznej.

Przedstawiając nieradialną DEA będziemy się odwoływać do klasycznego profilu CCR (Charnes, Cooper, Rhodes [2]). Ograniczymy się do nieradialnego modelu CCR, w skrócie NR-CCR, zorientowanego na nakłady.

2. Określanie efektywności metodą CCR ukierunkowaną na nakłady

2.1. Idea określania efektywności metodą CCR

1. Dany jest pewien zbiór obiektów gospodarczych (np. oddziałów banku, firm, jednostek przestrzennych). Ponumerujemy je przez $j = 1, \dots, J$.
2. Obiekty te przekształcają nakłady X_1, X_2, \dots, X_N w rezultaty Y_1, Y_2, \dots, Y_R ³.
3. Dostępne są następujące informacje o każdym z obiektów:

³ Używamy tu terminologii: nakład (*input*) oraz rezultat (*output*), a nie rezultat w znaczeniu *efekt*, gdyż to ostatnie prowadzi do paradoksów słownych. O ile bowiem w przypadku efektywności ukierunkowanej na nakłady (koszty) można mówić o tzw. efektywności *kosztowej*, o tyle w przypadku efektywności ukierunkowanej na efekty trzeba by mówić o *efektywności „efektowej”*. Przyjmując natomiast, że *output* jest rezultatem (wynikiem), można mówić o *efektywności wynikowej*.

x_{nj} – wielkość nakładu n -tego rodzaju poniesionego w obiekcie j -tym ($n = 1, \dots, N$),
 y_{rj} – wielkość rezultatu r -tego rodzaju uzyskanego w obiekcie j -tym ($r = 1, \dots, R$;
 $j = 1, \dots, J$).

Nakłady i rezultaty wyrażają się liczbami nieujemnymi, przy czym przynajmniej jeden rodzaj nakładu i przynajmniej jeden rodzaj rezultatu jest w danym obiekcie liczbą dodatnią.

Zadanie polega na określeniu efektywności (sprawności) poszczególnych obiektów przy transformowaniu ich wiązek nakładów w wiązki rezultatów.

Wektor

$$\mathbf{T}_j = \begin{bmatrix} x_j \\ y_j \end{bmatrix}, \quad (1)$$

gdzie:

x_j – (pionowy) wektor nakładów poczynionych w obiekcie j -tym,

y_j – (pionowy) wektor rezultatów uzyskanych w obiekcie j -tym,

nazywa się technologią obiektu j -tego.

Dla określenia efektywności wybranego obiektu, mającego powiedzmy numer o -ty, w metodzie CCR ukierunkowanej na nakłady rozwiązuje się dotyczące tego obiektu, ściśle określone (i dość proste) liniowe zadanie decyzyjne. Jego celem jest ustalenie takiej liniowej kombinacji technologii poszczególnych obiektów, że nakłady poniesione na uzyskanie za jej pomocą autentycznych rezultatów obiektu o -tego są najmniejsze w klasie wektorów nakładów proporcjonalnych do wektora nakładów obiektu o -tego.

Oznaczmy:

$$\lambda_{oj} \geq 0 \quad (j = 1, \dots, J) \quad (2)$$

współczynniki liniowej kombinacji technologii poszczególnych obiektów,

$$\tilde{\mathbf{T}}_o = \sum_{j=1}^J \lambda_{oj} \mathbf{T}_j \quad (3)$$

liniowa kombinacja technologii „obektowych”.

Kombinacja technologiczna $\tilde{\mathbf{T}}_o$ jest swego rodzaju technologią „wspólną” całego układu, „skojarzoną” z nakładami i rezultatami obiektu o -tego. „Wagą” obiektu j -tego jest λ_{oj} .

θ_o – mnożnik wielkości nakładów obiektu o -tego, określający jaką krotność rzeczywistych nakładów obiektu o -tego musiałaby „wykorzystać” technologia wspólna dla uzyskania rzeczywistych rezultatów obiektu o -tego. (4)

Przykład 1

Jeśli na przykład $\theta_o = 0,7$, oznacza to, że zrealizowanie za pomocą technologii wspólnej tych rezultatów, jakie uzyskał obiekt o -ty, wymaga 70% wielkości nakładów poniesionych w obiekcie o -tym.

Interpretując zaś ten wynik w „drugą” stronę, można powiedzieć, że aby obiekt o -ty był w pełni efektywny, musi on swoje nakłady proporcjonalnie zredukować przynajmniej do 70% dotychczasowych.

- Mnożnik $\theta_o < 1$ świadczy, że za pomocą technologii wspólnej rezultaty obiektu o -tego mogłyby być uzyskane przy mniejszym⁴ nakładzie niż to miało miejsce w tymże obiekcie, a zatem świadczy, że badany obiekt nie był (w pełni) efektywny.

- Jeśli natomiast $\theta_o \geq 1$ oznacza to, że technologia wspólna nie jest lepsza od technologii obiektu o -tego, a więc, że obiekt o -ty jest efektywny.

W zadaniu CCR jest $0 \leq \theta_o \leq 1$.

Z uwagi na przedstawioną interpretację, mnożnik θ_o jest też *wskaźnikiem efektywności* obiektu o -tego. Jeśli $\theta_o = 1$, obiekt jest w pełni efektywny. Jeśli zaś $\theta_o < 1$, efektywność badanego obiektu nie jest 100-procentowa i wynosi $\theta_o \times 100\%$.

2.2. Zadanie CCR dla obiektu o -tego

I. Dane – wielkości nakładów oraz rezultatów w poszczególnych obiektach, x_{nj} oraz y_{rj}

$$j = 1, \dots, J; r = 1, \dots, R; n = 1, \dots, N.$$

II. Zmienne decyzyjne:

$\lambda_{o1}, \lambda_{o2}, \dots, \lambda_{oJ}$ – współczynniki kombinacji technologii „wspólnej”, niezbędnej dla uzyskania rzeczywistego rezultatu obiektu o -tego. (5)

θ_o – mnożnik poziomu nakładów obiektu o -tego. (6)

III. Funkcja celu

$$\theta_o \rightarrow \min$$

– minimalizacja mnożnika poziomu nakładów o biekty o -tego. (7)

IV. Warunki ograniczające:

- rezultaty technologii wspólnej są nie mniejsze od rezultatów osiągniętych przez obiekt o -ty:

$$\sum_{j=1}^J y_{rj} \lambda_{oj} \geq y_{ro} \quad (\text{dla } r = 1, \dots, R); \quad (8)$$

⁴ Ogólnie – nie większym.

• nakłady technologii wspólnej są nie większe od części nakładów poniesionych przez obiekt o -ty:

$$\sum_{j=1}^J x_{nj} \lambda_{oj} \leq \theta_o x_{no} \quad (\text{dla } n = 1, \dots, N); \quad (9)$$

$$\theta_o \leq 1. \quad (10)$$

V. Warunki znakowe:

$$\theta_o; \lambda_{o1}, \lambda_{o2}, \dots, \lambda_{oJ} \geq 0. \quad (11)$$

♦ Zadanie podanego typu, z warunkiem nierównościowym (8) dla rezultatów i warunkiem nierównościowym dla nakładów, można nazwać zadaniem w *szerszym sensie* zorientowanym na nakłady („zorientowanie na nakłady” oznacza, że optymalizowana jest wielkość nakładów; „szeroki sens” – że rezultaty technologii wspólnej są równe lub większe od rezultatów obiektu o -tego; a więc, że może powstać nadwyżka rezultatów ponad wymagany dolny limit).

♦ Zadanie (5)–(7), (9) – (11), w którym będzie chodziło o minimalizację nakładów przy realizacji ściśle określonych rezultatów, a więc zadanie, w którym dotycząca rezultatów nierówność (8) zostaje zastąpiona przez równość

$$\sum_{j=1}^J y_{rj} \lambda_{oj} = y_{ro} \quad (\text{dla } r = 1, \dots, R), \quad (12)$$

można nazwać zadaniem *ściśle zorientowanym* na nakłady („ściśle” zorientowanie oznacza, iż za pomocą technologii wspólnej należy uzyskać dokładnie takie same rezultaty, jak w obiekcie o -tym).

Jest zrozumiałe, że wynik obu zadań: „ściśle” oraz „w szerokim sensie” ukierunkowanego, na ogół będą inne.

Dalej, mówiąc o zadaniu ukierunkowanym na nakłady, będziemy mieć na myśli zadanie ukierunkowane na nakłady w szerszym sensie, czyli zadanie (5)–(11).

W celu ustalenia efektywności wszystkich obiektów trzeba rozwiązać po jednym zadaniu dla każdego obiektu. Z formalnego punktu widzenia można jednak połączyć je w jedno „duże” zadanie, z funkcją celu postulującą minimalizację sumy wszystkich wskaźników efektywności θ_o , $o = 1, \dots, J$, gdyż zadania dla pojedynczych obiektów są niezależne.

3. Problem 1: szacowanie efektywności CCR

Wykorzystamy dane z pracy Gospodarowicza [7]. Rozpatrzono tam 50 polskich oraz zagranicznych banków działających w 1998 roku w Polsce i zbadano ich

efektywność technologiczną, przyjmując cztery rezultaty i cztery nakłady. Nasz przykład ma wyłącznie charakter ilustracyjny i dlatego ograniczymy się do 10 banków oraz dwóch nakładów (i czterech rezultatów). Informację statystyczną podano w tabeli 1.

Tabela 1. Rezultaty i nakłady banków

Bank		B1	B2	B3	B4	B5	B6	B12	B14	B15	B16
Nakłady	majątek	626	466	98,7	242	1367	57,2	549	807	1,4	567
	wkłady	13292	8762	5881	5449	51182	346	10560	31455	323	13170
Rezultaty	kredyty	9471	5859	1866	3540	17009	529	6761	7756	371	8027
	nałożności	2811	1200	3772	1807	3895	274	1162	5644	5	952
	papiery	4736	3262	383	1159	33882	1020	3944	20362	8,1	8305
	pro wizje	239	133	7,78	54,6	406	0,09	257	233	4,56	113

Źródło: Gospodarowicz [7, tab. 3].

Stosując CCR ukierunkowaną na nakłady, otrzymuje się wyniki podane w tabeli 2.

Tabela 2. Wyniki CCR ukierunkowanej na nakłady

Efektywność θ_o	Bank	Współczynniki λ_{oj}									
		B1	B2	B3	B4	B5	B6	B12	B14	B15	B16
0,990	B1	0	0	0,32	0	0	2,29	0,81	0	5,75	0
0,795	B2	0	0	0,02	0	0	2,17	0,43	0	4,71	0
1,000	B3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0,897	B4	0	0	0,30	0	0	1,73	0,15	0	2,75	0
1,000	B5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
1,000	B6	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
1,000	B12	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
1,000	B14	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
1,000	B15	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
0,815	B16	0	0	0	0	0,10	4,26	0,12	0	8,67	0

Źródło: Obliczenia własne.

Przykładowe wnioski:

- W pełni efektywne w sensie CCR ukierunkowanej na nakłady są banki: B3, B5, B6, B12, B14 oraz B15.
- Najmniej efektywny jest bank B2, którego efektywność stanowi ok. 80% efektywności banków najlepszych oraz bank B16 (efektywność 81,5%).
- Bank B2 byłby efektywny, gdyby każdy swój nakład obniżył do poziomu 79,5% nakładu dotychczasowego.

Nową, dającą 100-procentową efektywność, optymalną technologią dla banku B2 byłaby technologia obliczona jako:

2% technologii banku B3 plus 217% technologii B6 plus 43% technologii B12 plus 471% technologii B15, czyli:

$$\tilde{T}_2 = 0,02 \begin{bmatrix} 383 \\ 7,78 \\ 98,7 \\ 5881 \\ 1866 \\ 3772 \end{bmatrix} + 2,17 \begin{bmatrix} 1020 \\ 0,09 \\ 57,2 \\ 346 \\ 529 \\ 274 \end{bmatrix} + 0,43 \begin{bmatrix} 3944 \\ 257 \\ 549 \\ 10560 \\ 6761 \\ 1162 \end{bmatrix} + 4,71 \begin{bmatrix} 8,1 \\ 4,56 \\ 1,4 \\ 323 \\ 371 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{370} \\ \mathbf{6963} \\ 5859 \\ 1200 \\ 3967 \\ 133 \end{bmatrix};$$

$$T_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{466} \\ \mathbf{8762} \\ 5859 \\ 1200 \\ 3262 \\ 133 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{majątek} \\ \mathbf{wkłady} \\ \mathit{kredyty} \\ \mathit{należności} \\ \mathit{papiery} \\ \mathit{prowizje} \end{bmatrix}.$$

Autentyczną technologią obiektu drugiego podaje wektor T_2 .

W technologii „wzorcowej” nakład *majątku* oraz *wkładów* będzie mniejszy niż autentyczny, a rezultaty odnośnie do *kredytów*, *należności*, *prowizji* będą takie same, w stosunku do *papierów* będą natomiast większe

4. Interpretacja mnożnika nakładów θ

Z punktu widzenia substytucji nakładów w modelach DEA najistotniejsze znaczenie ma interpretacja mnożnika poziomu nakładów θ_o . Zauważmy przede wszystkim, że z warunku (9) dla CCR:

$$\sum_{j=1}^J x_{nj} \lambda_{oj} \leq \theta_o x_{no} \quad (\text{dla } n = 1, \dots, N)$$

wynika, iż zadanie będzie „dążyło” do ukształtowania takiego minimalnego poziomu prawej strony, który wystarczy do zrealizowania rezultatów przewidzianych przez warunek (8), i który będzie proporcjonalny do autentycznego nakładu poczynionego

w obiekcie o -tym. Współczynnik θ_o jest więc współczynnikiem proporcjonalności nakładów.

W standardowych modelach DEA mnożnik poziomu nakładów θ jest jednolity dla wszystkich nakładów.

W modelach tych zakłada się, że w celu minimalizacji ogólnego poziomu nakładów należy wszystkie je zmieniać w tej samej proporcji.

Przykład 2

Powiedzmy, że nakłady obiektu o -tego były następujące:

$$\mathbf{x}_o = \begin{bmatrix} 100 \\ 400 \end{bmatrix}.$$

W zadaniu DEA będzie się „próbowało”, na przykład, następujące górne pułapy nakładów:

$$\theta_o = 0,90, 0,80, 0,64,$$

$$(*) \quad \begin{bmatrix} 90 \\ 360 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 80 \\ 320 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 64 \\ 256 \end{bmatrix},$$

tj. 90%, 80%, 64% – wektora \mathbf{x}_o .

W standardowych wersjach metody DEA ma miejsce 100-procentowa komplementarność i zerowa substytucja nakładów.

Przykład 3

W standardowej DEA nie ma więc miejsca na przykład na następujące kombinacje nakładów zmieniające wektory nakładu z przykładu 2:

$$(**) \quad \begin{bmatrix} 88 \\ 354 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 82 \\ 300 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 66 \\ 251 \end{bmatrix}$$

spadek X_1 o 2 wzrost X_1 o 2 wzrost X_1 o 2

wzrost X_2 o 4; spadek X_2 o 20; spadek X_2 o 5

czyli nie ma miejsca na (choćby minimalną) substytucję nakładów.

W rzeczywistości gospodarczej substytucja nakładów, może nie 100-procentowa, ale częściowa, ma miejsce. W konsekwencji komplementarność nakładów może nie być całkowita.

Podstawowe założenie standardowych metod DEA o 100-procentowej komplementarności jest zbyt silne i należy je w mniejszym lub w większym stopniu odrzucić.

4.1. Ogólna idea nieradialnej DEA

Punktem wyjścia metod NR-DEA ukierunkowanych na nakłady jest rezygnacja z jednolitego mnożnika poziomu dla wszystkich nakładów $n = 1, \dots, N$. Przyjmuje się natomiast, że każdy nakład może mieć *inny mnożnik* (co nie wyklucza, oczywiście, że dla niektórych będzie on jednolity).

Niech więc $\theta_{no} \in (0, 1]$ oznacza mnożnik poziomu n -tego nakładu w obiekcie o -tym. Jak już powiedziano, dopuszczamy, że mnożniki te dla różnych nakładów mogą być różne.

Przykład 4

Powiedzmy, że autentyczne nakłady w obiekcie o -tym były takie, jak wyżej, tzn. $x_{1o} = 100$, $x_{2o} = 400$.

Między nakładami zachodziła więc proporcja $X_1/X_2 = 0,250$. W standardowej wersji DEA proporcja ta byłaby utrzymywana dla każdego poziomu nakładów. Niektóre wektory nakładów odpowiadające tej proporcji podano w przykładzie 2.

Obecnie, zakładając możliwość substytucji, proporcja ta może ulec zmianie, co zilustrowano w przykładzie 3. W pierwszej podanej tam sytuacji jest $X_1/X_2 = 0,242$, bo w stosunku do wyjściowej proporcji $X_1/X_2 = 0,25$ nastąpiła substytucja nakładu pierwszego przez drugi. Z kolei w drugiej sytuacji jest $X_1/X_2 = 0,273$, gdyż miała miejsce substytucja nakładu drugiego przez pierwszy.

5. Zadanie NR-CCR ukierunkowane na nakłady dla obiektu o -tego

I. Dane jak w CCR, czyli:

x_{nj} – wielkość nakładu n -tego rodzaju w j -tym obiekcie,

y_{rj} – wielkość rezultatu r -tego rodzaju w j -tym obiekcie.

II. Zmienne decyzyjne:

λ_{oj} ($j = 1, \dots, J$) – współczynniki liniowej kombinacji technologii obiektowych, (13)

θ_{no} ($n = 1, \dots, N$) – mnożniki poziomu poszczególnych nakładów w obiekcie o -tym. (14)

III. Funkcja celu

$$\sum_{n=1}^N \theta_{no} \rightarrow \min \quad (15)$$

- minimalizacja sumy mnożników poziomu nakładów⁵; wobec (17) oznacza to minimalizację nakładów technologii wspólnej.

IV. Warunki ograniczające

- rezultaty technologii wspólnej są nie gorsze od rezultatów obiektu o -tego

$$\sum_{j=1}^J \lambda_{oj} y_{rj} \geq y_{ro} \quad (r = 1, \dots, R), \quad (16)$$

nakład n -ty w technologii wspólnej nie przekracza pewnej – z uwagi na (15) – możliwie najmniejszej części tego nakładu w obiekcie o -tym

$$\sum_{j=1}^J \lambda_{oj} x_{nj} \leq \theta_{no} x_{no} \quad (n = 1, \dots, N), \quad (17)$$

$$\theta_{no} \leq 1 \quad (n = 1, \dots, N) \quad (18)$$

(warunek (18) jest analogonem warunku $\theta_o \leq 1$ dla metody CCR; z uwagi na jego postać nie trzeba dodawać warunku, by suma mnożników θ_{no} nie przekraczała N ⁶).

$$\lambda_{oj} \leq 1 \quad (j = 1, \dots, J). \quad (19)$$

V. Warunki znakowe

$$\lambda_{oj}, \theta_{no} \geq 0 \quad (j = 1, \dots, J; n = 1, \dots, N). \quad (20)$$

Wskaźnik θ_{no} ma, między innymi, następujące interpretacje:

1. jest wskaźnikiem efektywności obiektu o -tego ze względu na nakład n -ty;
2. określa procent, do jakiego powinien zostać zmniejszony nakład n -ty w badanym obiekcie, aby obiekt uzyskał 100-procentową efektywność ze względu na ów nakład,
3. oznacza, przy jakiej krotności nakładu obiektu o -tego cały układ obiektów – stosując swą optymalną technologię wspólną – uzyska rezultat analogiczny do rezultatu obiektu o -tego.

⁵ Oznacza to, oczywiście, minimalizację średniej z mnożników dla nakładów w danym obiekcie.

⁶ W CCR każdy nakład ma mnożnik $\theta_o \leq 1$. W CCR suma mnożników dla nakładów jest więc nie większa od N .

6. Problem 2: szacowanie efektywności nieradialnej

Obecnie rozwiążemy zadanie ustalania efektywności banków (tab. 1) za pomocą metody NR-CCR. Przyjmiemy, że dla obu nakładów mnożniki poziomów w danym obiekcie mogą być różne. Optymalne mnożniki $\hat{\theta}$ oraz optymalne współczynniki benchmarkingowe $\hat{\lambda}$ podano w tabeli 3.

Tabela 3. Optymalne rozwiązanie zadania NR-CCR ukierunkowanego na nakłady

Majątek	Wkłady	Bank	Współczynniki $\hat{\lambda}_{oj}$										
			B1	B2	B3	B4	B5	B6	B12	B14	B15	B16	
$\hat{\theta}_{1o}$	$\hat{\theta}_{2o}$												
0,947	1	B1	0	0	0,352	0	0	1,879	0,805	0	6,409	0	
0,707	0,818	B2	0	0	0,072	0	0	1,527	0,413	0	5,719	0	
1	1	B3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	
0,573	0,969	B4	0	0	0,401	0	0	0,496	0,117	0	4,687	0	
1	1	B5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	
1	1	B6	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	
1	1	B12	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	
1	1	B14	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	
1	1	B15	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	
1	0,616	B16	0	0	0	0	0,011	6,515	0,310	0	6,177	0	

Źródło: Obliczenia własne.

Przykładowe wnioski dotyczące efektywności obiektów

- Bank B1 jest w pełni efektywny ze względu na nakład drugi i jest efektywny w 94,7% ze względu na nakład pierwszy. Oznacza to, że dla uzyskania pełnej efektywności powinien on zredukować pierwszy nakład do 94,7% nakładu obecnego (i pozostawić nakład drugi na obecnym poziomie).

- Bank B3 jest w pełni efektywny ze względu na oba nakłady.

- Z uwagi na nakład pierwszy bank B4 jest efektywny tylko w 57,3%, a ze względu na nakład drugi – w 96,9%. Uzyskanie 100% efektywności jest możliwe, gdy pierwszy nakład zostanie zmniejszony do 57,3% aktualnego poziomu, a nakład drugi – do 96,9% obecnego poziomu.

Benchmarking

- Bank B1 stanie się efektywny, jeśli zacznie działać według technologii:

35,2% technologii B3 + 187,9% technologii B6 + 80,5% technologii B12 + 640,9% technologii B15.

Technologią wzorcową banku B1 jest wektor:

$$\hat{T}_1 = \begin{bmatrix} 593 \\ 13292 \\ 9471 \\ 2811 \\ 5278 \\ 239 \end{bmatrix}$$

Technologią autentyczną jest wektor:

$$T_1 = \begin{bmatrix} 626 \\ 13292 \\ 9471 \\ 2811 \\ 4736 \\ 239 \end{bmatrix}$$

• „Wzorcowe” nakłady są takie jak autentyczne, rezultaty natomiast są nieco na „wzrost”: technologia wspólna „wytwarza” więcej niż trzeba rezultatu nr 3 (To zjawisko – nadwyżek po stronie rezultatów i mniejszych niż wymagano nakładów, tzw. slack’ów – czyli zmiennych swobodnych, jest żywo dyskutowane w DEA).

7. Substytucja w modelu NR-DEA

Przedstawione zamiany wielkości nakładów przy przejściu od nakładów empirycznych do nakładów optymalnych oznaczają oczywiście *zmianę struktury* nakładów w porównaniu ze strukturą początkową. Jeśli więc obiekt działa racjonalnie, co dalej zakładamy, to zmiany te oznaczają substytucję jednych nakładów przez inne.

Substytucja jest to konieczne zmniejszenie jednego nakładu z uwagi na wzrost drugiego lub też bardziej intensywne zmniejszenie jednego nakładu z uwagi na wolniejszy, niż należało, spadek drugiego nakładu. Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że rozpatrujemy substytucję (wzrostu lub wolniejszego niż trzeba spadku) nakładu n -tego przez (spadek) nakładu m -tego.

Uwagi terminologiczne

W metodzie DEA, jak już mówiono, rozpatruje się sytuację, gdy za pomocą danego nakładu uzyskuje się, w ogólnym przypadku, kilka rezultatów; a do uzyskania danego rezultatu niezbędne jest wykorzystanie, w ogólnym przypadku, kilku nakładów.

1. Częstkowe wielkości nakładów poniesionych dla uzyskania rezultatów, czyli liczby x_{nj}^r ($j = 1, \dots, J$; $n = 1, \dots, N$; $r = 1, \dots, R$) nie są jednak znane. Znane są tylko ogólne (generalne) wielkości nakładów, x_{nj} , poniesionych w poszczególnych obiektach dla uzyskania wszystkich rezultatów tego obiektu. Dlatego też mówiąc o substytucji nakładów w modelach DEA, nie mamy na myśli substytucji pomiędzy nakładami stosowanymi do uzyskiwania danego, konkretnego rezultatu (*substytucja cząstkowa*), lecz tylko substytucję tych nakładów w odniesieniu do *całej wiązki rezultatów*, czyli substytucję *ogólną* (generalną).

2. Mówiąc o substytucji nakładów, mamy na myśli zmiany relacji pomiędzy nakładami w stosunku do sytuacji *początkowej*. Komplementarność natomiast będzie oznaczała brak takich zmian.

3. W dalszym ciągu artykułu przyjmujemy, że numer badanego obiektu, o , jest ustalony, co pozwoli zrezygnować z tego indeksu i uprości notację.

4. Pisząc symbol $\hat{\theta}$, będziemy mieć na myśli *optymalną* wartość mnożnika nakładów. Pisząc zaś symbol θ („bez daszka”), mówimy ogólnie o jakimś mnożniku nakładów, a nie o jego konkretnej wartości będącej rozwiązaniem zadania NR-CCR.

Symptomy substytucji

Dla potrzeb artykułu przyjmujemy bardzo prostą regułę:

O substytucji nakładów będzie świadczyła rozbieżność między optymalnymi mnożnikami poziomu poszczególnych nakładów.

a) Jeśli dla dwóch nakładów: m oraz n ($m \neq n$; $1 \leq m, n \leq N$) zachodzi w obiekcie o -tym:

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_m, \quad (21)$$

to w obiekcie tym nakłady n -ty oraz m -ty są w 100% komplementarne (i w 0% są substytucyjne).

b) Jeśli natomiast dla tych nakładów

$$\hat{\theta}_n \neq \hat{\theta}_m, \quad (22)$$

to w badanym obiekcie porównywane nakłady są substytucyjne.

Analiza substytucji dotyczy wyłącznie obiektów nie w pełni efektywnych, przynajmniej ze względu na jeden nakład i to takich, że wskaźniki efektywności dla przynajmniej dwóch nakładów są różne. Gdy wskaźniki efektywności dla wszystkich nakładów są identyczne (np. równe 1), wówczas nakłady są komplementarne.

Przykład 5

Niech tak, jak w przykładzie drugim, w sytuacji początkowej nakłady $x_{1o} = 100$, $x_{2o} = 400$.

a) Jeśli w rozwiązaniu zadania NR-CCR mnożniki $\hat{\theta}_1$ oraz $\hat{\theta}_2$ będą identyczne (niekoniecznie równe 1), oznaczać to będzie, że zadanie optymalizacyjne sugeruje pozostawienie poprzedniej proporcji tych nakładów, czyli sugeruje ich komplementarność w stosunku do sytuacji początkowej. Na przykład gdy $\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_2 = 0,7$, oznacza to, że oba nakłady należy „komplementarnie” zmniejszyć do 70% nakładów początkowych, czyli do $x_{1o}^* = 70$, $x_{2o} = 280$.

b) Jeśli natomiast mnożniki będą różne, na przykład $\hat{\theta}_1 = 0,8$; $\hat{\theta}_2 = 0,5$, oznaczać to będzie, że pierwszy nakład należy zmniejszyć do 80% poprzedniej wielkości, czyli do 80, a drugi do 50%, czyli do 200. Nastąpi więc zmiana struktury nakładów z 1:4 na

1:2,5, którą – przy założeniu racjonalności działania obiektu – należy wiązać z substytucją nakładów.

8. Niektóre charakterystyki substytucji w modelu NR-CCR

Substytucja jest to konieczne zmniejszenie jednego nakładu z uwagi na wzrost drugiego lub też bardziej intensywne zmniejszenie jednego nakładu z uwagi na wolniejszy, niż należało, spadek drugiego nakładu.

Wskaźnik rozpiętości substytucji

Za wskaźnik rozpiętości substytucji między dwoma nakładami można przyjąć różnicę między ich mnożnikami poziomu nakładów:

$$\Delta_{nm} = \left| \hat{\theta}_n - \hat{\theta}_m \right|. \quad (23)$$

Zerowa wartość odchylenia (23) świadczy, że nakłady są komplementarne, dodatnia – że są one substytucyjne – i to tym bardziej, im to odchylenie jest większe.

Ponieważ w metodzie NR-CCR oba mnożniki – $\hat{\theta}_n$ oraz $\hat{\theta}_m$ są liczbami z przedziału $[0, 1]$, również rozpiętość substytucji jest z przedziału $[0, 1]$, czyli od 0% do 100%. Przypadek 100-procentowej substytucji ma miejsce, gdy mnożnik dla jednego nakładu jest równy 1, zaś dla drugiego jest równy 0. Wskaźnik (23) jest, co oczywiste, symetryczny względem n oraz m .

Wskaźnik substytucji

Wskaźnikiem substytucji nakładu n -tego przez nakład m -ty można nazwać iloraz

$$W_{n;m} = \frac{\hat{\theta}_n}{\hat{\theta}_m}. \quad (24)$$

Obecną strukturę obu nakładów reprezentuje iloraz

$$\sigma_{n;m} = \frac{x_n}{x_m}. \quad (25)$$

Uwzględniając wskaźnik substytucji, strukturę „docelową” nakładów można określić jako

$$\hat{\sigma}_{n;m} = \frac{\hat{x}_n}{\hat{x}_m} = \sigma_{n;m} W_{n;m}. \quad (26)$$

Wskaźnik substytucji wyznacza więc zmianę struktury nakładów empirycznych, niezbędną do uzyskania struktury docelowej.

Zauważmy, że równanie (26) orzeka, iż

$$\frac{\hat{x}_n}{\hat{x}_m} = \frac{x_n}{x_m} W_{n,m},$$

z czego wynika, że

$$\frac{\hat{x}_m}{x_m} = \frac{\hat{x}_n}{x_n} W_{n,m}. \quad (27)$$

Gdyby faktyczny iloraz nakładu n -tego był większy od postulowanego:

$$\frac{\hat{x}_n^*}{x_n} = \frac{\hat{x}_n}{x_n} (1 + a), \quad a > 0, \quad (28)$$

faktyczny iloraz drugiego nakładu musiałby spełniać relację

$$\frac{\hat{x}_m^*}{x_m} = \frac{\hat{x}_m}{x_m} - \frac{\hat{x}_n}{x_n} a W_{n,m}, \quad (29)$$

czyli musiałby być mniejszy od postulowanego o ułamek występujący po znaku minus.

Punkt komplementarności oraz linia substytucji

Kombinację nakładów (a więc i mnożników nakładów), w którym ma miejsce komplementarność obu nakładów nazwiemy *punktem komplementarności* nakładów n -tego oraz m -tego i oznaczmy przez K_{nm} . Jego współrzędne dotyczące mnożnika θ_n oraz mnożnika θ_m są identyczne (bo inaczej nie miałyby miejsca komplementarność); oznaczmy je przez k .

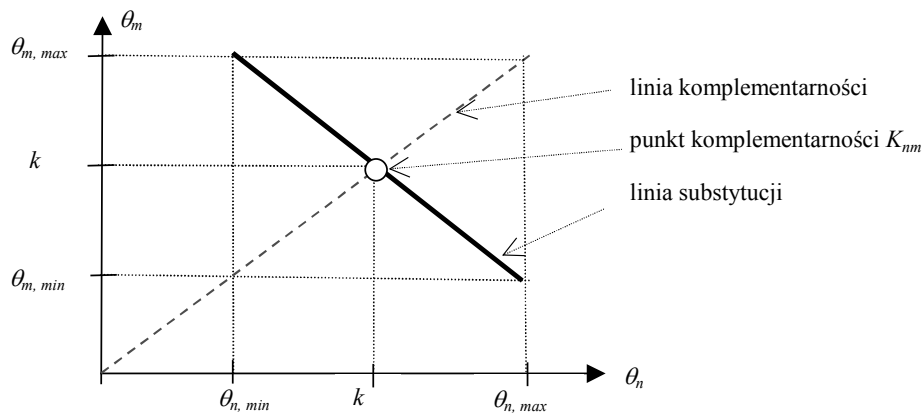
Niech ponadto P_n oznacza przedział zmienności mnożnika θ_n , a P_m – przedział zmienności mnożnika θ_m :

$$P_n = [\theta_{n, \min}, \theta_{n, \max}]; \quad P_m = [\theta_{m, \min}, \theta_{m, \max}] \quad (30)$$

Określenia min oraz max oznaczają minimalną oraz maksymalną wartość mnożnika nakładów. Oczywiście wartości minimalne są nie mniejsze od zera, a maksymalne nie większe od 1. Wartość k należy do obu przedziałów. Przedziały P_n oraz P_m nazwiemy *przedziałami substytucji*. Mogą one być symetryczne lub niesymetryczne względem odpowiedniej współrzędnej punktu komplementarności.

Punkt komplementarności jest miejscem przecięcia się linii *komplementarności* (przez którą rozumiemy linię, na której oba nakłady zmieniają się w tym samym stopniu) z linią *substytucji*, czyli linią określającą stopień zastępowania jednego nakładu przez drugi. W przestrzeni $\{\theta_n, \theta_m\}$ linia komplementarności to wychodząca z początku układu współrzędnych linia zapewniająca, że $\theta_n = \theta_m$ (w konsekwencji prowadzi to do identyczności współrzędnych punktu komplementarności). Linia sub-

stytucji natomiast to linia „ukośna”, zawierająca substytucyjne względem siebie kombinacje (θ_n, θ_m) .

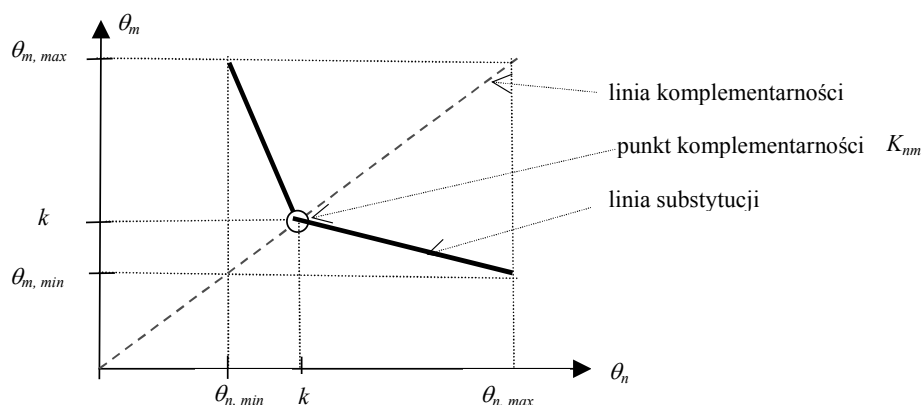


Rys. 1. Linia substytucji i punkt komplementarności. Symetryczne przedziały substytucji

Przebieg linii substytucji zależy od rodzaju substytucji (liniowa czy nieliniowa i jakiego typu) oraz od tego, czy przedziały substytucji P_n oraz P_m są symetryczne względem k .

Na rysunku 1 zilustrowano punkt komplementarności oraz linię substytucji i linię komplementarności w przypadku, gdy *substytucja* jest liniowa, a przedziały substytucji są symetryczne względem „swojej” współrzędnej punktu komplementarności.

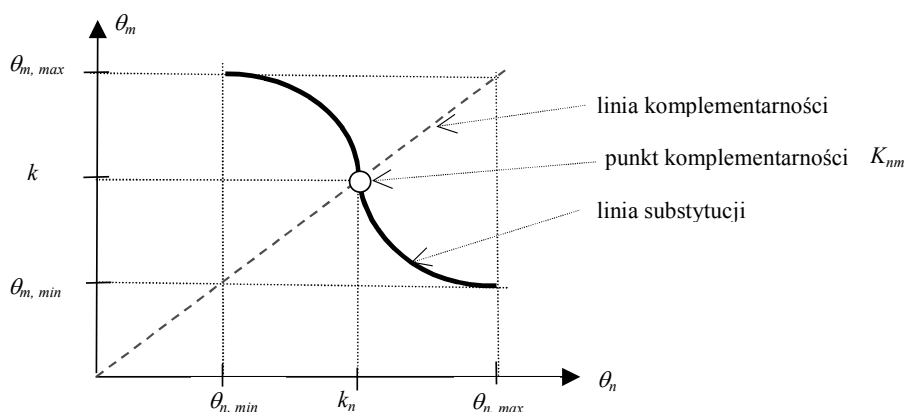
Z kolei na rysunku 2 zilustrowano linię substytucji, linię komplementarności oraz punkt komplementarności, gdy substytucja jest liniowa a przedział substytucji nie jest symetryczny względem punktu komplementarności.



Rys. 2. Linia substytucji i punkt komplementarności. Asymetryczne przedziały substytucji

Segmentowa linia substytucji zmienia kształt w miarę przesuwania się punktu komplementarności po linii komplementarności. W granicznym przypadku linia substytucji składa się z dwóch odcinków do siebie prostopadłych.

Na rysunku 3 podano natomiast przykład nieliniowej linii substytucji z symetrycznymi przedziałami substytucji. Ilustracja nieliniowej linii substytucji w przypadku asymetrycznych przedziałów substytucji jest podobna do rysunku 2 z tym, że linia substytucji nie jest funkcją segmentową, lecz funkcją „gładką”.



Rys. 3. Nieliniowa linia substytucji i punkt komplementarności. Symetryczny przedział substytucji

Intensywność substytucji

Intensywnością substytucji nakładu n -tego przez nakład m -ty w punkcie $\theta_m = \theta^*$ nazwiemy (minus) pierwszą pochodną linii substytucji, wziętą względem θ_m w punkcie $\theta_m = \theta^*$. (Zakładamy oczywiście, że ta pochodna istnieje.)

Przykładowo, jeśli substytucja nakładu n przez nakład m (i odwrotnie) jest liniowa a przedziały substytucji są takie same i są symetryczne względem punktu komplementarności obu nakładów, to punkt komplementarności θ_{nm} jest oczywiście środkiem przedziału, czyli

$$\theta_{nm} = \frac{\theta_n + \theta_m}{2} . \quad (31)$$

a wskaźnik substytucji $S_{n,m} = 1$.

W ogólnym przypadku substytucji *liniowej* z przedziałami substytucji niekoniecznie równymi i niekoniecznie symetrycznymi względem odpowiedniej składowej punktu komplementarności, intensywność substytucji nakładu n -tego przez nakład m -ty wyznaczana jest przez współczynnik kierunkowy odpowiedniego segmentu linii substytucji:

$$S_{n;m} = \begin{cases} S_{n;m}^1 & \text{dla } \theta_n \leq k \\ S_{n;m}^2 & \text{dla } \theta_n > k \end{cases}, \quad (32)$$

gdzie:

$$S_{n;m}^1 = \frac{\theta_{m,\max} - k}{k - \theta_{n,\min}}, \quad (\text{dla } \theta_n \leq k), \quad (33)$$

$$S_{n;m}^2 = \frac{k - \theta_{m,\min}}{\theta_{n,\max} - k}, \quad (\text{dla } \theta_n > k). \quad (34)$$

Intensywność substytucji to (wymagana) *prędkość spadku* mnożnika m -tego nakładu, gdy mnożnik nakładu n -tego wzrasta o jednostkę, np. wzrasta w stosunku do tego poziomu, jaki powinien mieć miejsce.

Gdyby jednostką zmian mnożników był 1 punkt procentowy, czyli wartość 0,01, $S_{n;m}$ określałby, o ile punktów procentowych zmienia się mnożnik nakładów, a więc określałby, *o ile procent* musi zmniejszyć się wielkość nakładu m -tego, gdy wielkość nakładu n -tego wzrośnie o 1% (na o 1% w stosunku do poziomu postulowanego). Wielkość nakładu jest bowiem iloczynem początkowej wielkości nakładów przez mnożnik.

Ustalanie intensywności substytucji liniowej

W modelu CCR nakłady są w pełni komplementarne. Dlatego otrzymany za pomocą metody CCR wskaźnik efektywności $\hat{\theta}_{CCR}$ obiektu o -tego można uznać za oszacowanie jego punktu komplementarności⁷. W takim razie można przyjąć, że

$$k = \hat{\theta}_{CCR}. \quad (35)$$

I. Sposób szacowania intensywności substytucji liniowej

Gdybyśmy przyjęli, że maksymalne mnożniki nakładów są równe 1, a minimalne są równe 0, oszacowane wskaźniki efektywności byłyby określone wzorami:

$$S_{n;m}^1 = \frac{1 - \hat{\theta}_{CCR}}{\hat{\theta}_{CCR}}, \quad (\text{dla } \theta_n \leq k), \quad (36)$$

$$S_{n;m}^2 = \frac{\hat{\theta}_{CCR}}{1 - \hat{\theta}_{CCR}} = \frac{1}{S_{n;m}^1}, \quad (\text{dla } \theta_n > k). \quad (37)$$

⁷ Jest to oszacowanie bez żadnych parametrycznych założeń o „naturze” substytucji nakładów.

II. Sposób szacowania intensywności substytucji liniowej

Gdybyśmy natomiast przyjęli, że dla porównywanej pary nakładów maksymalna wartość mnożnika nakładów określana jest przez ten cząstkowy mnożnik $\hat{\theta}_n$, $\hat{\theta}_m$, który jest większy, a minimalna wartość mnożnika nakładów – przez ten mnożnik cząstkowy, który jest mniejszy, czyli:

$$\theta_{n,\max} = \theta_{m,\max} = \theta_{\max} = \max\{\hat{\theta}_n, \hat{\theta}_m\}; \quad (39)$$

$$\theta_{n,\min} = \theta_{m,\min} = \theta_{\min} = \min\{\hat{\theta}_n, \hat{\theta}_m\};$$

wtedy:

$$S_{n;m}^1 = \frac{\theta_{\max} - \hat{\theta}_{CCR}}{\hat{\theta}_{CCR} - \theta_{\min}}, \quad (\text{dla } \theta_n \leq k), \quad (40)$$

$$S_{n;m}^2 = \frac{\hat{\theta}_{CCR} - \theta_{\min}}{\theta_{\max} - \hat{\theta}_{CCR}} = \frac{1}{S_{n;m}^1}, \quad (\text{dla } \theta_n > k). \quad (41)$$

1. Warto pamiętać, że:

- a) szacowanie wskaźników substytucji w modelach DEA dotyczy obiektów *nie w pełni efektywnych*, tzn. takich, dla których przynajmniej ze względu na jedno nakład efektywność jest mniejszy od 1;
- b) wskaźnik substytucji $W_{m;n}$ nakładu m -tego przez nakład n -ty jest odwrotnością wskaźnika substytucji $W_{n;m}$;
- c) intensywność substytucji $S_{m;n}$ nakładu m -tego przez nakład n -ty jest odwrotnością $S_{n;m}$.

2. Należy też zaznaczyć, że o substytucji nakładu n -tego przez nakład m -ty można mówić, gdy efektywność nakładu m -tego, $\hat{\theta}_m$, jest mniejsza od 1. Gdyby bowiem efektywność nakładu m -tego (który trzeba zmniejszać, aby zrekompensować wzrost lub niedostateczny spadek nakładu n -tego) była równa 1, to zmniejszania nakładu m -tego byłoby nieopłacalne: nakład m -ty nadal będzie miał efektywność „co najwyżej” 1 i nic nie zyskujemy na jego efektywności, przy jednoczesnym spadku efektywności nakładu n -tego.

9. Problem 3: Szacowanie wskaźników substytucji oraz intensywności substytucji

W tabeli 4 przytoczono wielkości poszczególnych nakładów i ich wskaźniki efektywności. Podano też wskaźniki substytucji.

Tabela 4. Mnożniki nakładów oraz wskaźniki substytucji

Bank	Wielkości nakładów		Wskaźniki efektywności		Wskaźniki substytucji	
	majątek (n)	wkłady (m)	majątek (n)	wkłady (m)	majątek (n)	wkłady (m)
	x_n	x_m	$\hat{\theta}_{no}$	$\hat{\theta}_{mo}$	$W_{n,m}$	$W_{m,n}$
B1	626	13292	0,947	1	0,947	1,055
B2	466	8762	0,707	0,818	0,864	1,157
B4	242	5449	0,573	0,969	0,591	1,692
B16	567	13170	1	0,616	1,623	0,616

Źródło: obliczenia własne, tabela 1, tabela 3.

Przykładowe wnioski dotyczące wskaźnika substytucji

- Nakłady w banku B1 są prawie komplementarne, gdyż mnożniki poziomu dla pierwszego i dla drugiego nakładu są prawie identyczne. Dlatego też uzyskanie optymalnej struktury nakładów (wynikającej ze 100-procentowej efektywności) nie będzie, przy obecnych nakładach, wymagało jakiegoś radykalnych działań, trzeba tylko majątek zmniejszyć do 94,7% dotychczasowego poziomu. Obecnie nakład pierwszy w banku B1 wynosi 626, a nakład drugi 13292, czyli realizuje się strukturę 1: 21,23. Należy ją zmienić do proporcji $0,947 \times (1/21,23)$, czyli do proporcji nakładów 1: 22,42.

- Z kolei w banku B4 zmiany muszą być radykalne, gdyż mnożniki poziomu nakładów wyraźnie się różnią: $\hat{\theta}_{1o} = 0,573$, $\hat{\theta}_{2o} = 0,969$. Obecna proporcja obu nakładów 1: 22,57 powinna się zmienić do $0,591 \times (1/22,57)$, czyli do 1: 38,2.

W tabeli 5 przedstawiono wyniki obliczeń wskaźników intensywności substytucji (wzrostu lub mniejszego niż trzeba spadku) majątku przez spadek wkładów. Zastosowano II sposób szacowania tych wskaźników.

Interpretując intensywność substytucji majątku przez wkłady, trzeba sprawdzać, czy optymalny wskaźnik dla majątku jest mniejszy od k .

Tabela 5. Intensywność substytucji

Bank	Majątek (n)	Wkłady (m)	θ_{\min}	θ_{\max}	k $\hat{\theta}_{CCR}$	$S_{n,m}^1$	$S_{n,m}^2$
	$\hat{\theta}_{1o}$	$\hat{\theta}_{2o}$					
B1	0,947	1	0,947	1,000	0,990	0,233	4,30
B2	0,707	0,818	0,707	0,818	0,795	0,261	3,83
B4	0,573	0,969	0,573	0,969	0,897	0,222	4,50
B16	1	0,616	0,616	1,000	0,815	0,930	1,08

Źródło: obliczenia własne, tabela 2, tabela 3.

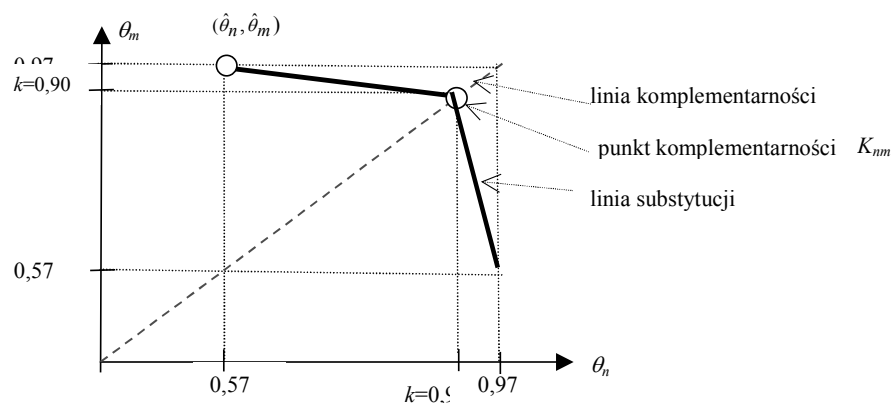
Przykładowe wnioski dotyczące intensywności substytucji

- W banku B1 wzrost nakładów majątku o 1% powinien być zrekompenzowany spadkiem wkładów o 0,233% (wzięto pierwszą wartość S , gdyż $\hat{\theta}_n < k$). Spadek wkładów nie jest jednak „opłacalny”, gdyż ich efektywność nie zwiększy się, bowiem już wynosi 1.

- W banku B2 wzrost majątku o 1% musi być zrekompenzowany spadkiem wielkości wkładów o 0,261%.

- Z kolei w banku B16 wzrost majątku o 1% musi być zrekompenzowany spadkiem wartości wkładów o 1,08% (bierzemy drugą wartość S , gdyż $\hat{\theta}_n > k$).

Na rysunku 4. zilustrowano linie substytucji w przypadku banku B4.



Rys. 4. Segmentami liniowa linia substytucji majątku (n) przez wkłady (m). Bank B4

Bibliografia

- [1] ANDERSEN P., PETERSEN N.C., *A procedure for ranking efficient units in Data Envelopment Analysis*, Management Science, 1993, 39(10).
- [2] CHARNES A., COOPER W.W., RHODES E., *Measuring the efficiency of decision making units*, European Journal of Operational Research, 1978, 2.
- [3] BANKER R.D., CHARNES A., COOPER W.W., *Some models for estimating technical and scale inefficiencies in Data Envelopment Analysis*, Management Science, 1984, 30/9.
- [4] DOMAGAŁA A., *Postulat homogeniczności jednostek decyzyjnych w metodzie DEA. Sugestie teoretyczne a wyniki symulacji empirycznych* [w:] *Ekonometria finansowa*, Zeszyty Naukowe AE w Poznaniu, Wyd. AE Poznań, Poznań 2006 (w druku).
- [5] DOYLE J., GREEN R., *Efficiency and cross-efficiency in DEA: Derivation, meanings and uses*, Journal of Operational Research Society, 1994, 45(5).
- [6] FERUŚ A., *Zastosowanie metody DEA do określania poziomu ryzyka kredytowego przedsiębiorstw*, Bank i Kredyt, 2006, 7, NBP, Warszawa 2006.

- [7] GOSPODAROWICZ M., *Procedury analizy i oceny banków*, Materiały i Studia, zeszyt 103, NBP, Warszawa 2000.
- [8] KOPCZEWSKI T., *Efektywność technologiczna i kosztowa banków komercyjnych w Polsce w latach 1997–2000*, cz. I, Materiały i Studia, zeszyt 113, NBP, Warszawa 2000.
- [9] KOPCZEWSKI T., PAWŁOWSKA M., *Efektywność technologiczna i kosztowa banków komercyjnych w Polsce w latach 1997–2000*, cz. II, Materiały i Studia, zeszyt 135, NBP, Warszawa 2001.
- [10] PAWŁOWSKA M., *Wpływ fuzji i przejęć na efektywność w sektorze banków komercyjnych w Polsce w latach 1997–2001*, Bank i Kredyt, 2003, 2, NBP, Warszawa 2003.
- [11] PRĘDKI A., *Analiza efektywności za pomocą metody DEA. Podstawy formalne i ilustracja ekonomiczna*, Przegląd Statystyczny, 2003, 1, Warszawa 2003.
- [12] ROGOWSKI G., *Metody analizy i oceny działalności banku na potrzeby zarządzania strategicznego*, Wydawnictwo WSB w Poznaniu, Poznań 1999.
- [13] ROGOWSKI G., *Analiza i ocena działalności banków z wykorzystaniem metody DEA*, Bank i Kredyt, 1996, 8, NBP, Warszawa 1996.
- [14] SEXTON T., SILKMAN R., HOGAN A., *Data Envelopment Analysis: Critique and Extensions*, [w:] R. Silkman (red.), *Measuring Efficiency: An Assessment of Data Envelopment Analysis. New Directions for Program Evaluation*, 1986, Jossey-Bass, San Francisco.
- [15] SEIFORD L.M., ZHU J., *Infeasibility of super efficiency Data Envelopment Analysis*, INFOR, 1998, 37, 2.
- [16] SUN S., LU W.M., *A cross-efficiency profiling for increasing discrimination in Data Envelopment Analysis*, Infor, 2005, 43, 1.
- [17] THANASSOULIS E., DYSON R.G., *Estimating preferred target input-output levels using Data Envelopment Analysis*, European Journal of Operational Research, 1992, 56.
- [18] TONE K., *A slacks-based measure of efficiency in Data Envelopment Analysis*, European Journal of Operational Research, 2001, 130.
- [19] TAWARES G., *A bibliography of Data Envelopment Analysis, 1978–2001*, BRR, 1/2002, www.rutcor.rutgers.edu/pub/trr
- [20] Tofallis C., *Improving discernment in DEA using profiling*, Omega, 1996, 24(3).

Including substitution of inputs in DEA models

Classic DEA models (e.g., CCR or super-efficiency DEA) assume that inputs are complementary and there is no substitution of inputs. The lack of substitution is a result of using the same input multiplier for all inputs. The author indicates that there is a possibility of including the substitution of inputs by using individual multiplier for each input. This is a characteristic of so-called non-radial DEA, which was proposed by Dyson and Thanassoulis (1992).

The author presents some simple measures of substitution which are based on individual multipliers of inputs: *substitution range*, *substitution index*, *substitution intensity*. The *substitution index* describes what change of initial structure of inputs is needed to reach the optimal technology. The *substitution intensity* describes the velocity of necessary decrease of one input induced by an increase or not as fast as expected a decrease of the second input.

Another characteristic of substitution is a *substitution line* the estimation of which is also proposed by the author.

Keywords: *Data Envelopment Analysis (DEA)*, *substitution of inputs*, *non-radial efficiency*