

Anna DOMAGAŁA*

METODA DATA ENVELOPMENT ANALYSIS JAKO NARZĘDZIE BADANIA WZGLĘDNEJ EFEKTYWNOŚCI TECHNICZNEJ

W artykule przedstawiono rozważania dotyczące pojęcia względnej efektywności technicznej ze szczególnym naciskiem na metodę Data Envelopment Analysis (DEA). Omówiono ideę metody na prostym przykładzie. Następnie szczegółowo zanalizowano podstawowy model CCR oraz dokonano krótkiego przeglądu modyfikacji i rozszerzeń modelu podstawowego.

Słowa kluczowe: *Data Envelopment Analysis (DEA), efektywność techniczna, granica efektywności*

1. Wprowadzenie

W literaturze ekonomicznej spotyka się różnorodne określenia efektywności ekonomicznej, gdyż w każdym poważnym podręczniku traktującym o podstawach ekonomii poświęca się dużo uwagi temu pojęciu¹.

Należy jednak podkreślić, że większość tych definicji określa efektywność w sposób bardzo ogólny i podstawowy, a często wręcz intuicyjny. Nazywana tak samo „efektywność” jest definiowana różnie, gdyż dotyczy różnych typów efektywności².

* Katedra Ekonometrii, Akademia Ekonomiczna, al. Niepodległości 10, 60-967 Poznań,
e-mail: anna.domagala@ae.poznan.pl

¹ Przykładowo: *efektywność to maksymalizacja produkcji wynikająca z właściwej alokacji zasobów, przy danych ograniczeniach podaży (kosztów ponoszonych przez producentów) i popytu (preferencji konsumentów)* [30, s. 61] czy też: *takie użytkowanie zasobów, które przyczynia się do osiągnięcia maksymalnego poziomu satysfakcji możliwego przy danych nakładach i technologii* [42, s. 618].

² Choćby zróżnicowanie definicji efektywności w świetle *ekonomii neoklasycznej* (patrz: przypis 2), gdzie oznacza ona efektywność *produkcyjną* (do maksymalizacji zysku dąży się poprzez ceny oraz ilości nakładów i wyników produkcji) oraz w świetle *nowej ekonomii instytucjonalnej* – gdzie mówi się o efektywności *organizacyjnej* (dążenie do minimalizacji kosztów funkcjonowania organizacji i maksy-

W literaturze istnieje oczywiście wiele szczegółowych definicji efektywności – ale są to pojęcia uwzględniające pewne założenia, co oznacza, że nie można już używać samego pojęcia „efektywność” i należy zawsze sprecyzować, o jaki rodzaj efektywności chodzi.

Istotna dla dalszych rozważań jest tzw. *efektywność w sensie Pareto*. Pareto (1906) w rozdziale VI swojej pracy stawia tezę, że gospodarka znajduje się w stanie optimum (maksimum ze względu na poziom dobrobytu), gdy nie jest technologicznie możliwa taka realokacja zasobów, która powiększy dobrobyt jakiegokolwiek jednostki bez jednoczesnego zmniejszenia dobrobytu innej jednostki.

Obecnie pojęcie to funkcjonuje nie tylko w rozważaniach dotyczących całej gospodarki, ale pojawia się również w obszarze mikroekonomii³.

Przymiotniki przy słowie „efektywność” (czy wyrażenia „w sensie”) powodują, że wchodzimy w węższy obszar rozważań nad efektywnością – i taki charakter ma niniejszy artykuł. Dotyczy on bowiem efektywności technicznej, do analizy której służy metoda Data Envelopment Analysis (DEA).

Metoda DEA jest już znana w Polsce przynajmniej od 1998 roku⁴, głównie jednak w ośrodkach naukowych. Jej zastosowanie w praktyce jest dotychczas niewielkie, w przeciwieństwie do Stanów Zjednoczonych, krajów Europy Zachodniej czy Skandynawii, gdzie jest ona stosowanym w praktyce narzędziem wspomagania procesów decyzyjnych. Metodę DEA wykorzystuje się tam do badania efektywności technicznej obiektów, takich jak:

- szpitale, inne zakłady opieki zdrowotnej⁵;
- jednostki edukacyjne (szkoły, uczelnie wyższe)⁶;
- jednostki wojskowe⁷;
- inne organizacje typu *non-profit*, np. biblioteki, instytucje charytatywne⁸;
- instytucje ubezpieczeniowe⁹;

malizacji wydajności poprzez motywację uczestników organizacji), która obok efektywności produkcyjnej (której istnienia nowa ekonomia instytucjonalna nie neguje) prowadzi do maksymalizacji zysku podmiotu gospodarczego [23, s. 38].

³ Np. przy porównywaniu podmiotów gospodarczych z wykorzystaniem wielowymiarowej analizy DEA.

⁴ Metodę DEA opisywano w polskiej literaturze m.in. [w:] Rogowski [39, 40, 41], Kopczewski [31], Gospodarowicz [24], Prędko [36], Pawłowska [35], Domagała [16, 15].

⁵ Patrz np.: Jacobs [25], Jacobs, Smith i Street [26] czy O’Neill i Dexter [33].

⁶ Patrz np.: Bates [5], Chakraborty, Biswas i Lewis [7], Feng, Lu i Bi [19], Johnes [27] czy w polskiej literaturze np. Szuwarzyński [45].

⁷ Patrz np.: Sun [44], Rees i Bowden [37].

⁸ Patrz np.: analiza bibliotek – Saunders [43], analiza instytucji charytatywnych – Joo, Stoerberl i Kwon [28].

⁹ Patrz np.: Retzlaff-Roberts i Puelz [38], Cummins, Tennyson i Weiss [12] czy Fukuyama i Weber [20].

- banki¹⁰, inne instytucje finansowe, np. fundusze inwestycyjne,
- gospodarstwa rolne¹¹.

2. Metoda Data Envelopment Analysis jako metoda badania efektywności technicznej

Badania dotyczące efektywności nazwanej techniczną, które bezpośrednio tkwią u podstaw metody DEA, prowadził M.J. Farrell. Wynikiem jego rozważań jest m.in. praca pt. *The Measurement of Productive Efficiency* [18], w której wprowadza i precyzuje pojęcie tego typu efektywności. Praca Farrella stała się załącznikiem ogromnej gałęzi badań, która wyrosła na pograniczu dziedzin: teorii ekonomii, badań operacyjnych i nauk o zarządzaniu.

Największy wkład w te badania od czasu Farrella wnieśli trzej amerykańscy naukowcy: A. Charnes, W.W. Cooper i E. Rhodes, którzy opracowali metodę Data Envelopment Analysis (DEA) [8], służącą do badania efektywności względnej¹² badanych obiektów. Metoda ta została zaprezentowana w 1978 roku na łamach czasopisma „European Journal of Operational Research”¹³.

Metoda DEA należy do grupy metod nieparametrycznych, gdyż nie dokonuje się tu estymacji parametrów.

Efektywność (oznaczana symbolem θ) w metodzie DEA jest definiowana jako iloraz ważonej sumy efektów przez ważoną sumę nakładów. Jest, jak już wspomniano, efektywnością względną, gdyż konstruuje się ją w odniesieniu do całej badanej grupy obiektów.

Wyznaczenie wskaźnika efektywności dla danego obiektu, który w terminologii DEA zwany jest jednostką decyzyjną (ang. *Decision-Making Unit*, DMU)¹⁴, polega na rozwiązaniu jednego z modeli DEA. Modelem takim jest odpowiednio skonstruowane zadanie programowania liniowego, w którym zmiennymi decyzyjnymi są wagi, zwane mnożnikami (ang. *multipliers*). W wyniku rozwiązania owego programu liniowego

¹⁰ Patrz np.: Yue (1992), Berger i Humphrey [6], Thanassoulis [46], Gołany i Storbeck [22] czy też w polskiej literaturze np.: Rogowski [39], Kopczewski [31], Pawłowska (2003, 2005).

¹¹ Patrz np.: Alene, Manyong i Gockowski [1], Galanopoulos, Aggelopoulos, Kamenidou i Mattas [21] czy w polskiej literaturze np. Jurek i Winnicki [29].

¹² Względnej, gdyż wyznaczanej na podstawie pozostałych obiektów poddanych analizie.

¹³ Artykuł jest dostępny w Polsce, m.in. w bibliotece Instytutu Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk w Warszawie.

¹⁴ Gdyż zakłada się, że jednostki mają wpływ na poziom nakładów i efektów wykorzystywanych w analizie.

uzyskuje się wskaźnik efektywności dla badanej jednostki decyzyjnej¹⁵. Jeśli taka jednostka okaże się nieefektywna, rozwiązanie podaje również zbiór obiektów wzorcowych (zwanych benchmarkami¹⁶) wraz z przypisanymi do nich optymalnymi wielkościami wag, które informują, jak taka jednostka nieefektywna powinna zredukować swoje nakłady (lub zwiększyć swoje efekty – w zależności od przyjętej orientacji modelu¹⁷), aby poprawić swoją efektywność¹⁸.

Warto wyjaśnić używane w metodzie DEA pojęcie efektywności względnej. Podany w kolejnym rozdziale przykład¹⁹ obrazuje różnicę między efektywnością (rozumianą jako stosunek efektu do nakładu) a efektywnością względną.

3. Idea metody Data Envelopment Analysis

Dane są cztery jednostki: A, B, C oraz D. Każda z nich opisywana jest jednym efektem (y) i jednym nakładem (x), co pokazano w tabeli 1.

Tabela 1

Jednostka	y	x	Efektywność (y/x)
A	125	18	6,94
B	44	16	2,75
C	80	17	4,71
D	23	11	2,09

Źródło: Witryna internetowa Johna E. Beasleya, poświęcona metodzie DEA (<http://people.brunel.ac.uk/~mastjjb/jeb/or/dea.html>)

W celu wyznaczenia efektywności względnej należy zestawić wszystkie obiekty z jednostką, która w najlepszy sposób przekształca nakłady w efekty (w przykładzie jest to jednostka A) (zob. tab. 2).

¹⁵ W metodzie DEA zakłada się, iż analizowane jednostki działają w obrębie jednego zbioru możliwości produkcyjnych (ang. *Production Possibility Set* – PPS), zwanego również technologią produkcji. Jest to przestrzeń, która obejmuje wszystkie możliwe kombinacje nakładów i efektów.

¹⁶ Benchmarking to w skrócie poszukiwanie wzorcowych sposobów postępowania przez uczenie się od innych i wykorzystywanie ich doświadczenia [50, s. 36].

¹⁷ Podstawowy model DEA może być zorientowany na nakłady (wtedy metoda daje wskazówki, jak redukować nakłady przy stałym poziomie efektów) lub zorientowany na efekty (maksymalizacja efektów przy stałym poziomie nakładów).

¹⁸ Szczegółowo podejście DEA zaprezentowali m.in.: Charnes, Cooper i Rhodes [8], Banker, Charnes i Cooper [2], Cooper, Seiford i Tone [10], a także Kocpczewski [31].

¹⁹ Przykład jest zaczerpnięty (a następnie rozszerzony) z witryny internetowej Johna E. Beasleya, poświęconej metodzie DEA (<http://people.brunel.ac.uk/~mastjjb/jeb/or/dea.html>).

Tabela 2

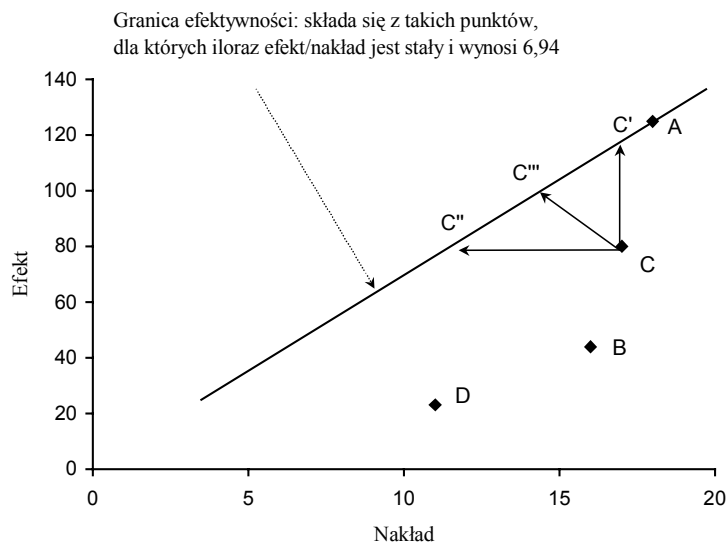
Jednostka	Efektywność (y/x)	Wskaźnik efektywności względnej
A	6,94	$\frac{6,94}{6,94} \cdot 100\% = 100\%$
B	2,75	$\frac{2,75}{6,94} \cdot 100\% = 40\%$
C	4,71	$\frac{4,71}{6,94} \cdot 100\% = 68\%$
D	2,09	$\frac{2,09}{6,94} \cdot 100\% = 30\%$

Źródło: Witryna internetowa Johna E. Beasleya, poświęcona metodzie DEA (<http://people.brunel.ac.uk/~mastjjb/jeb/or/dea.html>)

Obiekt, którego wskaźnik efektywności względnej wynosi 100% nazywany jest efektywnym. Pozostałe obiekty to jednostki nieefektywne.

Efektywna jednostka A wyznacza granicę efektywności (która jest również granicą zbioru możliwości produkcyjnych analizowanej grupy obiektów). Dla wszystkich jednostek, znajdujących się na tej granicy, efektywność względna wynosi 100%.

Dzięki ustaleniu tej granicy jednostki nieefektywne mogą poszukiwać kierunków zmian w poziomie nakładów (lub efektów), które doprowadzą je do tej granicy, a tym samym spowodują, że ich wskaźnik efektywności względnej wyniesie 100%. Obrazuje to rysunek 1, nawiązujący do wyników z tabeli 2.



Rys. 1. Efektywność jednostek decyzyjnych, granica efektywności

Źródło: Opracowanie własne.

Strzałki na wykresie pokazują trzy kierunki zalecanych zmian²⁰ dla jednostki C, która aby osiągnąć poziom efektywności równy 100%, powinna dążyć do któregoś z punktów odcinka $\overline{C'C''}$. Oznacza to zatem poszukiwanie możliwej redukcji nakładów bądź też osiągalnego dla tej jednostki zwiększenia efektów.

Jeżeli wybierze ona punkt C' jako docelowy, przyjmie tzw. orientację na efekty, a więc decyduje się dążyć do maksymalizacji efektów, przy jednoczesnym zachowaniu obecnego poziomu nakładów. Wybór punktu C'' z kolei to orientacja na nakłady. Jednostka C będzie redukować nakłady, przy równoczesnym zachowaniu stałego poziomu efektów.

W artykule pomija się analizę punktów leżących pomiędzy C' i C'' , gdyż reprezentują one inne, mieszane podejścia (mające swoje odzwierciedlenie w modyfikacjach podstawowego modelu DEA), które zakładają brak orientacji na nakłady lub efekty – tę sytuację na rysunku 1 odzwierciedla np. punkt C''' .

Prostych przypadków, jak powyższy, raczej nie spotyka się w faktycznych badaniach efektywności. Gdy jednostki opisywane są więcej niż jednym nakładem i jednym efektem²¹, badanie komplikuje się i prosta analiza graficzna nie jest możliwa. Wtedy jedynie rozwiązanie odpowiedniego modelu DEA pozwala obliczyć względną efektywność obiektów i odnaleźć wzorce dla jednostek nieefektywnych.

4. Podstawowy model DEA – model CCR

Modeli DEA w literaturze jest obecnie bardzo dużo. Wszystkie powstały jako modyfikacje podstawowego modelu CCR (skrót od pierwszych liter nazwisk autorów metody), którego wersję zorientowaną na nakłady omówiono poniżej.

Model ten jest zagadnieniem programowania nieliniowego (ilorazowego), sprowadzalnym do zadania liniowego.

Określenie poziomu efektywności danej jednostki polega na rozwiązaniu związanego z nią zadania decyzyjnego. Zadań jest zatem tyle, ile jest badanych obiektów. Badany obiekt oznacza się indeksem o . Przyjęto następujące oznaczenia:

n – liczba jednostek decyzyjnych, ($j = 1, \dots, n$),

s – liczba wytwarzanych efektów, ($r = 1, \dots, s$),

m – liczba nakładów²², ($i = 1, \dots, m$),

x_{ij} – wielkość i -tego nakładu j -tej jednostki decyzyjnej,

²⁰ Spośród nieskończonej liczby.

²¹ Ścisłej: więcej niż trzema zmiennymi łącznie, gdyż sytuacje „1 efekt – 2 nakłady” lub „2 efekty – 1 nakład” można także analizować na wykresie.

²² Zakłada się, że wszystkie jednostki używają takich samych nakładów i wytwarzają te same efekty.

y_{rj} – wielkość r -tego efektu j -tej jednostki,
 v_{io} – zmienna decyzyjna; waga związana z i -tym nakładem w zadaniu dotyczącym o -tego obiektu,
 u_{ro} – zmienna decyzyjna; waga związana z r -tym efektem w zadaniu dotyczącym o -tego obiektu,
 o – indeks oznaczający badaną jednostkę decyzyjną, $1 \leq o \leq n$,
 θ_o – wskaźnik efektywności o -tego obiektu.

Funkcja celu zorientowanego na nakłady nieliniowego modelu CCR dla badanej jednostki ma następującą postać²³:

$$\max \theta_o = \frac{\sum_{r=1}^s u_{ro} y_{ro}}{\sum_{i=1}^m v_{io} x_{io}}. \quad (1)$$

Maksymalizuje się efektywność, a więc iloraz ważonej sumy efektów przez ważoną sumę nakładów. Zmienne decyzyjne v_{io} oraz u_{ro} to wagi związane w obiekcie o -tym odpowiednio z i -tym nakładem i r -tym efektem. Optymalne wartości tych zmiennych informują o tym, jak silny wpływ ma dany nakład lub dany efekt na wielkość wskaźnika efektywności DEA danej jednostki. Pokazują zatem „ważność” poszczególnych nakładów i efektów w danym obiekcie, co w praktyce jest bardzo cenną informacją dla analityka.

Zadanie programowania nieliniowego jest, jak już wspomniano, rozszerzonym zagadnieniem programowania ilorazowego (ang. *fractional programming*) i można je przekształcić do postaci liniowej. Metodę takiej transformacji zaproponowali A. Charnes i W.W. Cooper²⁴.

Warto przyjrzeć się bliżej dualnej postaci zlinearyzowanego modelu CCR, gdyż w praktyce właśnie ten model się rozwiązuje²⁵:

$$\min \left\{ \theta_o - \varepsilon \left(\sum_{i=1}^m s_{io}^- + \sum_{r=1}^s s_{ro}^+ \right) \right\}, \quad (2)$$

przy ograniczeniach:

²³ Por. Charnes, Cooper i Rhodes [8, s. 431].

²⁴ Transformacja Charnesa-Coopera została opisana m.in. przez Charnesa, Coopera i Rhodesa [8], Coopera, Seiforda i Tone'a [10], a w polskiej literaturze przez Nykowskiego [32].

²⁵ Model dualny w metodologii DEA jest dwufazowy, jednak obie fazy można ująć w jednym modelu – co w praktyce znacznie skraca obliczenia [10, s. 73].

$$\begin{aligned}
\theta x_{io} &= \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_{jo} + s_{io}^{-}, \quad i = 1, \dots, m, \\
y_{ro} &= \sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_{jo} - s_{ro}^{+}, \quad r = 1, \dots, s, \\
\lambda_{jo}, s_{io}^{-}, s_{ro}^{+} &\geq 0, \quad \forall j, i, r,
\end{aligned} \tag{3}$$

gdzie:

θ_o – wskaźnik efektywności,

λ_{jo} – zmienna decyzyjna; waga j -tego obiektu z punktu widzenia obiektu o -tego,

s_{ro}^{+} – zmienna decyzyjna (zwana „luzem”), związana z r -tym efektem w o -tym obiekcie,

s_{io}^{-} – zmienna decyzyjna (zwana „luzem”), związana z i -tym nakładem w o -tym obiekcie,

ε – stała infinitesimalna.

Rozwiązując zadanie (2), (3) dla obiektu o , można wyznaczyć optymalną wartość wskaźnika efektywności θ_o oraz n wag λ_{jo} ($j = 1, \dots, n$). Szczególną uwagę należy zwrócić na wartości wag λ_{jo} . Jeżeli są one różne od zera, to obiekty z nimi związane są wzorcami dla badanego obiektu o . Wagi (λ_{jo}) dla tych wzorcowych obiektów informują, w jakich proporcjach należy „dobrać” ich nakłady²⁶, aby badany obiekt o uzyskał efektywność równą 100%²⁷.

Nałożone warunki ograniczające uniemożliwiają wyznaczenie dla któregośkolwiek obiektu wskaźnika efektywności względnej większego od 100%.

Spośród zmiennych decyzyjnych wersji zlinearyzowanej (oprócz oryginalnych zmiennych v_{io} oraz u_{ro} przekształconych na skutek linearyzacji i zmiennych λ_{jo} w postaci dualnej modelu zlinearyzowanego²⁸) ważną rolę odgrywają luzy poszczególnych warunków ograniczających.

W polskiej terminologii badań operacyjnych luzy zwane są inaczej zmiennymi swobodnymi. Są to nieujemne zmienne, których dodatnie wartości wskazują, że możliwa jest zmiana wartości nakładów i/lub efektów bez zmiany rozwiązania zadania. Uwzględnienie tych zmiennych w modelu jest więc niezwykle istotne, gdyż niezerowe wartości luzów również odzwierciedlają nieefektywność techniczną jednostki.

W literaturze dotyczącej analizy DEA nieefektywność techniczną dzieli się na tzw. czystą nieefektywność techniczną (ang. *purely technical inefficiency*) oraz tzw.

²⁶ W wyniku czego powstanie nowy (niższy) nakład badanego obiektu o .

²⁷ Oczywiście rozwiązanie następnego zadania (gdy inny obiekt staje się obiektem o) prowadzi do wyznaczenia innych wag, które z kolei posłużą do analizy tego obiektu.

²⁸ Szczegółowo zlinearyzowaną postać modelu CCR autorka opisała w pracy [15]. O szczególnie ważnych zmiennych λ_{jo} więcej w pracy [14], gdzie pokazano empiryczne zastosowanie metody DEA.

mix-nieefektywność (ang. *mix inefficiency*). Podział ten wyjaśnia różne sposoby usuwania tych nieefektywności²⁹.

W przypadku czystej nieefektywności technicznej jej usuwanie polega na proporcjonalnym zmniejszeniu wszystkich nakładów (lub proporcjonalnym zwiększeniu wszystkich efektów – w zależności od orientacji modelu). Pozbywanie się *mix-nieefektywności* polega natomiast na doprowadzeniu do wyzerowania wszystkich luzów.

Po przedstawieniu modelu CCR i objaśnieniu wszystkich występujących tam oznaczeń, można zdefiniować pojęcie efektywności w sensie DEA. Z rozwiązania modelu CCR dla obiektu o -tego otrzymuje się m.in. wskaźnik efektywności (θ_o^*) oraz wartości optymalne luzów ($s_{ro}^+ *$ oraz $s_{io}^- *$). Obiekt o -ty jest efektywny w sensie DEA, gdy spełnione są równocześnie dwa warunki³⁰:

1. $\theta_o^* = 1,$
2. $s_{ro}^+ * = 0$ oraz $s_{io}^- * = 0.$ (4)

Spełnienie tylko warunku 1. gwarantuje tzw. słabą efektywność. Niezerowa wartość któregokolwiek z luzów – np. wartość i -tego luzu $s_{io}^- *$ – powoduje, że jednostka jest oceniana jako nieefektywna³¹, gdyż możliwa jest dalsza redukcja (do poziomu $x_{io} - s_{io}^- *$ związanego z tym luzem nakładu) bez zmiany rozwiązania (a więc utrzymując wartość $\theta_o^* = 100\%$) i przy niezmiennym poziomie efektów. Oznacza to, że istnieje inna jednostka, dla której $\theta_o^* = 100\%$, ale która zużywa mniej i -tego nakładu.

Warto w tym miejscu dodać, że efektywność w sensie DEA jest również efektywnością w sensie Pareto³². Oznacza to, iż badana jednostka jest w pełni efektywna (w sensie DEA), wtedy i tylko wtedy, gdy nie jest możliwe „polepszenie” (a więc redukcja w przypadku nakładów lub zwiększenie w przypadku efektów) żadnego z nakładów lub efektów bez pogorszenia innych – a więc bez zwiększenia któregoś z pozostałych nakładów albo zmniejszenia któregoś z efektów.

5. Modyfikacje i rozszerzenia modelu podstawowego

Na zakończenie należy również zasygnalizować istnienie wielu modyfikacji podstawowego modelu DEA, przedstawionego przez Charnesa, Coopera i Rhodesa [8].

²⁹ Cooper, Seiford i Tone [10, s. 10–11].

³⁰ Charnes, Cooper i Rhodes [8, s. 433].

³¹ Jest to właśnie wspomniana wcześniej *mix-nieefektywność*.

³² Charnes, Cooper i Rhodes [8, s. 433].

Warto tu wspomnieć o modelu BBC³³, który jest pierwszą i najczęściej przytaczaną modyfikacją modelu podstawowego DEA. Model BCC (zorientowany na nakłady lub efekty) różni się od modelu podstawowego CCR wprowadzonym dodatkowym ograniczeniem³⁴, które powoduje, że model BCC pozwala analizować efektywność skali³⁵ (ang. *scale efficiency*).

W literaturze wymienia się także inne modele powstałe z rozważań nad modelem CCR. Niektóre z nich to³⁶:

- *Additive Model* (ADD) – zaproponowany przez Charnesa, Coopera, Golany, Seiforda i Stutza [9]; charakteryzuje się tym, że nie jest zorientowany ani na nakłady, ani na efekty, ale jego wadą jest to, że nie określa jednoznacznie – jak modele CCR i BCC – poziomu efektywności; wykorzystuje nieradialną miarę efektywności.

- *Slack-Based Measure* (SBM) – model opracowany przez Tone [48] powstał jako rozszerzenie modelu ADD; może być zarówno zorientowany, jak i niezorientowany; podaje jednoznaczną miarę efektywności; wykorzystuje nieradialną miarę efektywności.

- *Free Disposal Hull* (FDH) – zaproponowany przez Deprinsa, Simara i Tulkensa [13]; model ten nie dokonuje przybliżenia granicy efektywności – jak to ma miejsce w podstawowym modelu DEA, a zatem efektywność badanego obiektu jest obliczana tylko i wyłącznie w odniesieniu do zaobserwowanych wyników obiektów najlepszych³⁷.

- Podstawowy model CCR uwzględniający nakłady i/lub efekty tzw. niekontrolowalne (ang. *nondiscretionary*) – a więc takie, na których poziom badany obiekt nie ma wpływu³⁸; jako pierwsi zaproponowali taki model Banker i Morey [3], [4].

- Modele DEA z ograniczeniami nałożonymi na wagi nakładów i efektów³⁹ – nakładanie takich restrykcji proponuje się, gdy badacz dysponuje dodatkową wiedzą (np. wiedzą ekspercką) na temat znaczenia poszczególnych nakładów i rezultatów. Jako pierwsi zastosowali takie ograniczenia: Thompson, Singleton, Thrall i Smith [47], a także Dyson i Thanassoulis [17].

³³ Zaproponowany przez Bankera, Charnesa i Coopera [2].

³⁴ Ograniczenie to ma postać: $\sum_{j=1}^j \lambda_{jo} = 1$.

³⁵ W modelu CCR przyjmuje się założenie stałych efektów skali.

³⁶ Przegląd wybranych modeli DEA wywodzących się z modelu CCR opracowano na podstawie: Cooper, Seiford i Tone [10], Cooper, Seiford i Zhu [11] oraz Zhu [49].

³⁷ Więcej o różnicy między modelem CCR a FDH [w:] Cooper, Seiford i Tone [10, s. 117–119].

³⁸ W metodzie DEA zakłada się, że badany obiekt ma wpływ na poziom nakładów i wyników, a zatem może je dowolnie zwiększać lub zmniejszać w celu podniesienia swojej efektywności działania.

³⁹ W podstawowym modelu CCR nie nakłada się żadnych ograniczeń na wagi.

Podsumowanie

Metoda Data Envelopment Analysis od czasu zaprezentowania jej przez Charnesa, Coopera i Rhodesa (1978) zdobywa coraz więcej zwolenników. Bardzo szybko doceniono także możliwości, jakie daje jej praktyczne zastosowanie.

W Polsce metoda DEA również staje się coraz bardziej popularna, czego wyrazem jest wciąż zwiększająca się liczba publikacji dotyczących tej tematyki.

Przedstawione w artykule teoretyczne rozważania miały na celu przybliżenie idei metody DEA i jej podstawowego modelu CCR.

Autorka, w nawiązaniu do tych rozważań, omówiła również empiryczne zastosowanie metody DEA. Analizę przestrzenno-czasową efektywności banków polskich zaprezentowała we wcześniejszej pracy [14].

Bibliografia

- [1] ALENE A.D., MANYONG V.M., GOCKOWSKI J., *The production efficiency of intercropping annual and perennial crops in southern Ethiopia: A comparison of distance functions and production frontiers*, *Agricultural Systems*, Vol. 91 (1–2), 2006, s. 51–70.
- [2] BANKER R.D., CHARNES A., COOPER W.W., *Some Models for Estimating Technical and Scale Inefficiencies in Data Envelopment Analysis*, *Management Science*, Vol. 30, Nr 9, wrzesień 1984.
- [3] BANKER R.D., MOREY R., *Efficiency Analysis for Exogenously Fixed Inputs and Outputs*, *Operations Research*, 34 (4), 1986a, s. 513–521.
- [4] BANKER R.D., MOREY R., *The Use of Categorical Variables in Data Envelopment Analysis*, *Management Science*, 32 (12), 1986b, s. 1613–1627.
- [5] BATES J.M., *The Efficiency of Local Education Authorities*, *Oxford Review of Education*, Vol. 19, Nr 3, 1993, s. 277–289.
- [6] BERGER A.N., HUMPHREY D.B., *Measurement and efficiency issues in commercial banking, Output Measurement in the Service Sectors*, National Bureau of Economic Research Studies in Income and Wealth, Vol. 56 (Z. Griliches, ed.), University of Chicago Press, 1992, s. 245–279.
- [7] CHAKRABORTY K., BISWAS B., LEWIS W.C., *Measurement of Technical Efficiency in Public Education: A Stochastic and Nonstochastic Production Function Approach*, *Southern Economic Journal*, Vol. 67, Nr 4, 2001, s. 889–905.
- [8] CHARNES A., COOPER W.W., RHODES E., *Measuring the efficiency of decision making units*, *European Journal of Operational Research*, 2, 1978.
- [9] CHARNES A., COOPER W.W., GOLANY B., SEIFORD L. M., STUTZ J., *Foundations of Data Envelopment Analysis for Pareto–Koopman’s Efficient Empirical Production Functions*, *Journal of Econometrics*, 30, 1985, s. 91–107.
- [10] COOPER W.W., SEIFORD L.M., TONE K., *Data Envelopment Analysis. A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software*, Springer, 2007.
- [11] COOPER W.W., SEIFORD L.M., ZHU J., *Handbook on Data Envelopment Analysis*, Kluwer Academic Publishers, 2004.

- [12] CUMMINS D., TENNYSON S., WEISS M.A., *Consolidation and Efficiency in the U.S. Life Insurance Industry*, Wharton Working Papers, Financial Institutions Center, 1998; artykuł w formacie PDF dostępny na stronie: <http://fic.wharton.upenn.edu/fic/papers/98.html>
- [13] DEPRINS D., SIMAR L., TULKENS H., *Measuring Labor Efficiency in Post Offices, w: The Performance of Public Enterprises: Concepts and Measurement* (ed. Marchand M., Pestieau P., Tulkens H.), Amsterdam, North Holland, 1984, s. 243–267.
- [14] DOMAGAŁA A., *Przestrzenno-czasowa analiza efektywności jednostek decyzyjnych metodą Data Envelopment Analysis – na przykładzie banków polskich*, Badania Operacyjne i Decyzje nr 3–4, 2007, Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, 2007.
- [15] DOMAGAŁA A., *Postulat homogeniczności jednostek decyzyjnych w metodzie DEA. Sugestie teoretyczne a wyniki symulacji empirycznych*, Zeszyt Naukowy AE w Poznaniu, Poznań, 2006.
- [16] DOMAGAŁA A., *Stabilność wyników metody DEA ze względu na metody grupowania obiektów na przykładzie banków polskich*, praca magisterska obroniona w 2004 r. na Wydziale Ekonomii Akademii Ekonomicznej w Poznaniu.
- [17] DYSON R.G., THANASSOULIS E., *Reducing Weight Flexibility in Data Envelopment Analysis*, Journal of the Operational Research Society, 39, 1988, s. 563–576.
- [18] FARRELL M.J., *The Measurement of Productive Efficiency*, The Journal of the Royal Statistical Society, Seria A, Nr 120 (III), 1957, s. 253–281.
- [19] FENG Y.J., LU H., BI K., *An AHP/DEA method for measurement of the efficiency of R&D management activities in universities*, International Transactions in Operational Research, Vol. 11 (2), 2004, s. 181–191.
- [20] FUKUYAMA H., WEBER W.L., *Efficiency and Productivity Change of Non-Life Insurance Companies in Japan*, Pacific Economic Review, 6, 2001, s. 129–146.
- [21] GALANOPOULOS K., AGGELOPOULOS S., KAMENIDOU I., MATTAS K., *Assessing the effects of managerial and production practices on the efficiency of commercial pig farming*, Agricultural Systems, Vol. 88 (2–3), 2006, s. 125–141.
- [22] GOLANY B., STORBECK J.E., *A Data Envelopment Analysis of the Operational Efficiency of Bank Branches*, Interfaces, 29:3, 1999, s. 14–26.
- [23] GORYNIA M., *Zachowania przedsiębiorstw w okresie transformacji: mikroekonomia przejścia*, Wydawnictwo AE, Poznań, 1998,
- [24] GOSPODAROWICZ A., *Analiza i ocena banków oraz ich oddziałów*, Wyd. Akademii Ekonomicznej im. Oskara Langego we Wrocławiu, Wrocław 2002.
- [25] JACOBS R., *Alternative Methods to Examine Hospital Efficiency: Data Envelopment Analysis and Stochastic Frontier Analysis*, Health Care Management Science, Vol. 4, Nr 2, 2001, s. 103–115.
- [26] JACOBS R., SMITH P.C., STREET A., *Measuring Efficiency in Health Care*, Cambridge University Press, 2006.
- [27] JOHNES J., *Measuring teaching efficiency in higher education: An application of data envelopment analysis to economics graduates from UK Universities 1993*, European Journal of Operational Research, Vol. 174 (1), 2006, s. 443–456.
- [28] JOO S., STOEBERL P.A., KWON I.G., *Benchmarking efficiencies and strategies for resale operations of a charity organization*, Benchmarking: An International Journal, Vol. 14 (4), 2007, s. 455–464.
- [29] JUREK A., WINNICKI K., *Zastosowanie metody DEA i indeksu produktywności Malmquista do oceny sytuacji ekonomicznej wybranych spółek Agencji Nieruchomości Rolnych, Metody i zastosowania badań operacyjnych*, Akademia Ekonomiczna w Katowicach, 2004, s. 163–175.
- [30] KAMERSCHEN D.R., MCKENZIE R.B., NARDINELLI C., *Ekonomia*, Fundacja Gospodarcza NSZZ „Solidarność”, Gdańsk 1991.

- [31] KOPCZEWSKI T., *Efektywność technologiczna i kosztowa banków komercyjnych w Polsce w latach 1997–2000*. Cz. I., Materiały i Studia NBP nr 113, Warszawa 2000.
- [32] NYKOWSKI I., *Programowanie liniowe*, PWE, Warszawa 1980.
- [33] O'NEILL L., DEXTER F., *Methods for Understanding Super-Efficiency Data Envelopment Analysis. Results with an Application to Hospital Inpatient Surgery*, Health Care Management Science, 8, 2005, s. 291–298.
- [34] PARETO V., *Manuel d'économie politique*, Paris: V. Giard et E. Briere, 1909.
- [35] PAWŁOWSKA M., *Analiza porównawcza efektywności technicznej polskiego sektora bankowego i sektorów bankowych krajów CEC5 i wybranych krajów UE w latach 1997–2001*, Bank i Kredyt, maj 2004, s. 41–47.
- [36] PRĘDKI A., *Analiza efektywności za pomocą metody DEA: podstawy formalne i ilustracja ekonomiczna*, Elipsa, Przegląd Statystyczny, 50(1), 2003, s. 87–100.
- [37] REES L.M.L., BOWDEN F.D.J., *System Instantiation Comparison Method: A Technique for Comparing Military Headquarters*, Land Operations Division, Defence Science and Technology Organisation, DSTO-RR-0322, 2007; artykuł w formacie PDF dostępny na stronie: <http://dSPACE.dsto.defence.gov.au/dSPACE/handle/1947/4740>.
- [38] RETZLAFF-ROBERTS D., PUELZ R., *Classification in automobile insurance using a DEA and discriminant analysis hybrid*, Journal of Productivity Analysis, Vol. 7, Nr 4, 1996, s. 417–427.
- [39] ROGOWSKI G., *Metody analizy i oceny banku na potrzeby zarządzania strategicznego*, Wyd. Wyższej Szkoły Bankowej, Poznań 1998.
- [40] ROGOWSKI G., *Metodologia (Analiza efektywności banków na potrzeby zarządzania strategicznego bankiem; cz. 1)*, Badania Operacyjne i Decyzje, 1999, nr 1, s. 69–89.
- [41] ROGOWSKI G., *Zastosowanie metody DEA do analizy polskich banków w 1994–1995 roku (Analiza efektywności banków na potrzeby zarządzania strategicznego bankiem; cz. 2)*, Badania Operacyjne i Decyzje, 1999, Nr 3/4, s. 99–118.
- [42] SAMUELSON P.A., NORDHAUS W.D., *Ekonomia*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2004.
- [43] SAUNDERS E.S., *Cost efficiency in ARL academic libraries*, The Bottom Line: Managing Library Finances, Vol. 16 (1), 2003, s. 5–14; (ARL – Association of Research Libraries).
- [44] SUN S., *Assessing joint maintenance shops in the Taiwanese Army using data envelopment analysis*, Journal of Operations Management, Vol. 22 (3), 2004, s. 233–245.
- [45] SZUWARZYŃSKI A., *Metoda DEA pomiaru efektywności działalności dydaktycznej szkół wyższych*, Nauka i Szkolnictwo Wyższe (półrocznik wydawany przez Centrum Badań Polityki Naukowej i Szkolnictwa Wyższego Uniwersytetu Warszawskiego), Nr 2/28/2006, 2006, s. 78–88.
- [46] THANASSOULIS E., *Data Envelopment Analysis and Its Use in Banking*, Interfaces, 29:3, 1999, s. 1–13.
- [47] THOMPSON R.G., SINGLETON JR. F.D., THRALL R.M., SMITH B.A., *Comparative Site Evaluations for Locating a High-Energy Physics Lab in Texas*, Interfaces, 16, 1986, s. 35–49.
- [48] TONE K., *A Slack-based Measure of Efficiency in Data Envelopment Analysis*, Research Reports, Graduate School of Policy Science, Saitama University, 1997; opublikowane w: European Journal of Operational Research, 130, 2001, s. 498–509.
- [49] ZHU J., *Quantitative Models for Performance Evaluation and Benchmarking – Data Envelopment Analysis with Spreadsheets and DEA Excel Solver*, Springer, 2003.
- [50] ZIMNIEWICZ K., *Współczesne koncepcje i metody zarządzania*, PWE, Warszawa 1999.
- [51] Witryna internetowa Johna E. Beasley'a, poświęcona metodzie DEA:
<http://people.brunel.ac.uk/~mastjib/jeb/or/dea.html>

Data Envelopment Analysis – a method for measuring the relative technical efficiency

In the article, the author presents Data Envelopment Analysis, which is a method for measuring relative technical efficiency. The idea of DEA method is illustrated by a simple example, where objects characterized by one input and one output only are considered. Next, the basic DEA model (CCR model) is described and conditions are given, based on which a unit under examination can be considered efficient.

The author also presents a short review of some basic CCR model modifications, which, e.g., allow the existence of variable returns to scale (in CCR model, it is assumed that returns to scale are constant), and simultaneous input and output model orientation – basic CCR model is input-oriented or output-oriented. The modifications may also consist in introducing nondiscretionary variables into DEA efficiency analysis or additional constraints to the basic CCR model.

Keywords: Data Envelopment Analysis (DEA), technical efficiency, efficiency frontier