B A D A N I A   O P E R A C Y J N E   I   D E C Y Z J E

Nr 1 2005

Zofia WILIMOWSKA*
Małgorzata ŁUKANIUK*

MODELE WYCENY OPCJI RZECZOWYCH – MODELE BLACKA–SCHOLESA

W artykule omówiono modele wyceny opcji finansowych i opcji rzeczowych. Zwrócono uwagę na analogie i różnice w tych opcjach. Miarą zmienności ceny akcji w modelu Blacka–Scholesa jest odchylenie standardowe stopy zwrotu z akcji, mierzone w skali jednego roku. Model Blacka–Scholesa zakłada, że zmienność jest stała w czasie. W artykule zwrócono uwagę, że zmienność cen akcji spółek notowanych na WGPW znacznie zmienia się w czasie, dlatego wyceniając opcje rzeczowe w procesie wyceny wartości spółki, należy brać pod uwagę dane z krótkich okresów czasowych, np. ceny zamknięcia dla danych dziennych z ostatnich 90–180 dni, aby zachować założenia modelu. Przedstawiono również modele oparte na modelu Blacka–Scholesa, odchodzące od pewnych założeń przyjmowanych w tym modelu – uogólnienia modelu Blacka–Scholesa.

Słowa kluczowe: *opcje rzeczowe, model dwumianowy, wartość spółki*

1. Wstęp

Zmienność (ryzyko) warunków towarzyszących działalności gospodarczej stwarza konieczność reakcji na zmiany otoczenia. Dotychczas stosowane metody wyceny firmy są w tym zakresie niewystarczające, ponieważ nie przypisują żadnej wartości aktywnemu zarządzaniu przedsiębiorstwem w zmieniających się warunkach. Metody majątkowe są podstawą wyceny wyłącznie aktualnej substancji materialnej przedsiębiorstwa, metody dochodowe – ustalonego na wiele lat do przodu sztywnego scenariusza dochodów, również metody mieszane, będące kompilacją metod majątkowych i dochodowych, nie przypisują żądanej wartości możliwości reakcji przedsiębiorstwa na zmiany otoczenia. Tymczasem przedsiębiorstwo może aktyw-

* Instytut Organizacji i Zarządzania, Politechnika Wrocławska, ul. Smoluchowskiego 25, 50-372 Wrocław, e-mail: Zofia.Wilimowska@pwr.wroc.pl

nie wpływać na swoją sytuację. Może dopasowywać się do zmian w otoczeniu przez zmianę skali działalności, odroczenie czy zaniechanie pewnych inwestycji. Wiele decyzji inwestycyjnych tworzy pewne specyficzne możliwości (opcje), na przykład wejścia na nowe rynki, rozszerzenia działalności czy jej ograniczania wówczas, gdy okaże się ona nieopłacalna. Trudno sporządzić precyzyjne prognozy dochodów generowanych przez takie przedsięwzięcia, ponieważ często mają charakter warunkowy, uzależniony od niedających się obecnie przewidzieć okoliczności. Przykładem są inwestycje w prace badawczo-rozwojowe, budowę marki, rozwój sieci dystrybucji, które mogą być pierwszym ogniwem w łańcuchu kolejnych inwestycji. Podejmując takie inwestycje, przedsiębiorstwo uzyskuje jednocześnie możliwość dalszego rozwoju.

Wycenę przedsiębiorstw w warunkach niepewności, która uwzględnia zdolność przedsiębiorstwa do reakcji na zmieniające się warunki działalności, określa się terminem *Real Option Valuation*. W polskiej literaturze przedmiotu funkcjonuje tłumaczenie terminu *real option* jako opcje rzeczowe oraz jako opcje rzeczywiste (ten termin dominuje zarówno wśród autorów polskich, jak i tłumaczy), sporadycznie jako opcje realne.

Opcjami rzeczowymi nazywa się korzyści strategiczne, wartości niematerialne, czy możliwości inwestycyjne, które dają posiadaczowi opcji prawo do wszystkich przepływów pieniężnych generowanych przez aktywa w całym okresie życia, w zamian za poniesienie określonych nakładów inwestycyjnych. Na przykład posiadanie patentu, które jest opcją rzeczową, daje właścicielowi prawo, ale nie obowiązek, wykorzystania opatentowanej technologii w produkcji. Z posiadaniem patentu nie są związane żadne przepływy pieniężne, ale trudno zaprzeczyć, że patent ma określoną wartość.

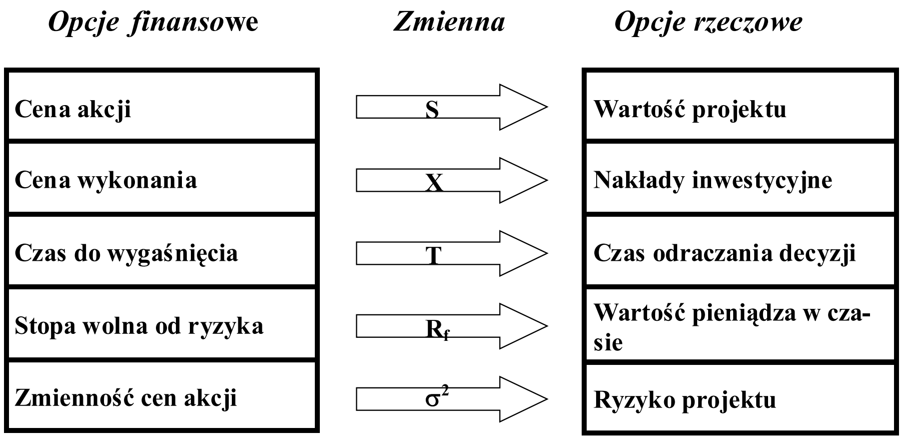
Wśród najczęściej spotykanych rodzajów opcji rzeczowych M. Amaram i N. Kulatilaka [1] wymieniają: opcje rozwoju (wzrostu), wyjścia, dopasowania czasowego, etapowania, elastyczności operacyjnej.

2. Modele

W literaturze przedmiotu opcje rzeczowe, podobnie jak opcje na papierach wartościowych, dotyczą dobrowolnych decyzji lub praw, bez żadnego obowiązku, aby nabyć lub wymienić aktywa po określonej alternatywnej cenie.

• Wartość aktywów podstawowych w modelu opcji rzeczowych to oczekiwana wartość obecna przyszłych przepływów pieniężnych. Zmiany wartości aktywów podstawowych w czasie są opisywane przez odpowiednio dobrany proces stochastyczny.

• Cena wykonania oznacza wartość obecną wszystkich poniesionych w przyszłości kosztów. Jeśli wartość obecna przyszłych kosztów wzrasta, to wartość opcji obniża się. Koszt jest jednym z obszarów, gdzie istnieje zasadnicza różnica między opcjami rzeczowymi i finansowymi. W opcjach finansowych cena wykonania jest określona w kontrakcie. W przypadku opcji rzeczowych natomiast przyszły koszt jest często nieznany przed podjęciem inwestycji.



Rys. 1. Analogie między opcjami na aktywach finansowych i rzeczowych na przykładzie opcji odroczenia
Ź r ó d ł o: na podstawie [4].

• Czas do wygaśnięcia to w zależności od rodzaju opcji – czas ważności patentu, możliwości odraczania decyzji o rozpoczęciu inwestycji, okres przewagi konkurencyjnej itp. W przeciwieństwie do opcji finansowych czas do wygaśnięcia dla opcji rzeczowych nie zawsze jest stały.

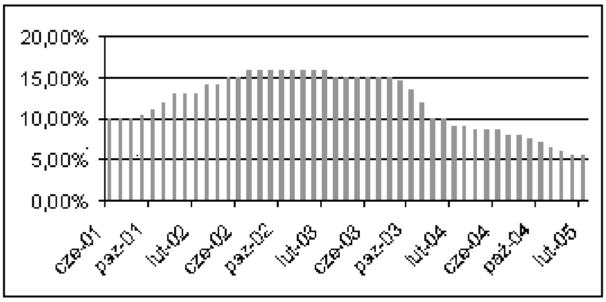
• Jako stopę procentową wolną od ryzyka przyjmuje się stopę zwrotu z pozbawionych ryzyka papierów wartościowych, którą można byłoby uzyskać w czasie do wygaśnięcia opcji. W wycenie opcji finansowych przyjmuje się zazwyczaj, że wolna od ryzyka stopa procentowa jest stała w czasie (tak jest np. w modelu Blacka–Scholesa, modelu Coxa[1]). Ze względu na zmienność w czasie stóp procentowych właściwsze wydaje się traktowanie stopy wolnej od ryzyka jako procesu stochastycznego (rys. 2).

• W odniesieniu do opcji rzeczowych zmienność jest miarą niepewności co do wartości przyszłych przepływów pieniężnych.

• Skutkiem wypłaty dywidendy na rynku kapitałowym jest spadek ceny akcji w dniu ustalenia prawa do dywidendy. Wpływa to na wzrost wartości opcji sprzedaży i obniżenie wartości opcji kupna. W analizie opcji rzeczowych stopa dywidendy reprezentuje utracone podczas życia opcji przepływy pieniężne z projektu.

---

[1] Cox J. C., Ross S. A., Rubinstein M., *Option Pricing: A Simplified Approach*, Journal of Financial Economocs, September, 1979.



Rys. 2. Rentowność polskich dwuletnich obligacji państwowych o terminach wykupu w latach 2001–2005

Model Blacka–Scholesa określa wartość europejskich *opcji kupna* wystawionych na akcje, które *nie przynoszą dywidendy*. F. Black i M. Scholes jako pierwsi zauważyli (1973)[2], że z akcji i opcji można skonstruować portfel wolny od ryzyka (portfel arbitrażowy[3]). Ponieważ arbitraż gwarantuje, że rentowność portfela pozbawionego ryzyka musi być równa bezpiecznej stopie zwrotu, zatem w połączeniu z odpowiednimi warunkami brzegowymi pozwoliło to F. Blackowi i M. Scholesowi wyprowadzić analityczny model wyceny europejskich opcji kupna jako funkcję ceny akcji (S), ceny wykonania (X), czasu (T) do wygaśnięcia opcji, wolnej od ryzyka stopy procentowej (r_f) oraz wariancji ceny akcji (σ^2) [2, 3].

Przy założeniach:

- stopa wolna od ryzyka jest stała w okresie do wygaśnięcia opcji,
- stopy zwrotu z akcji w nieskończenie małych odcinkach czasu mają rozkład normalny, rozkład cen akcji jest logarytmiczno-normalny,
- akcja nie przynosi dywidendy,
- istnieje możliwość krótkiej sprzedaży,
- przebieg cen akcji da się modelować ciągłym procesem stochastycznym Ito,

wartość europejskiej opcji kupna w modelu Blacka–Scholesa wynosi [2, 10]:

$$C = SN\left(\frac{\ln\frac{S}{X}+\left(r_f+\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - Xe^{-r_f T}N\left(\frac{\ln\frac{S}{X}+\left(r_f-\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right),$$

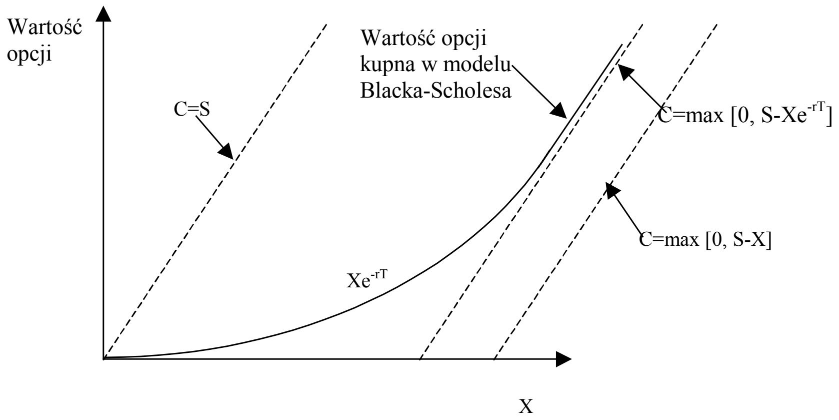
[2] Black F., Scholes M., *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, Journal of Political Economy, May–June, 1973.

[3] W portfelu arbitrażowym zakłada się, że zależność między stopami zwrotu z poszczególnych składowych portfela a czynnikami ryzyka jest liniowa. (E. Bright, *Teoria inwestowania*, Warszawa 1996, Z. Wilimowska, M. Wilimowski, *Sztuka zarządzania finansami*, cz. I, Bydgoszcz 2002).

gdzie:

S – cena akcji,
X – cena wykonania,
r_f – stopa wolna od ryzyka,
σ – odchylenie standardowe stopy zwrotu akcji w skali roku,
T – długość okresu do terminu wygaśnięcia wyrażona w skali roku,
$N\{.\}$ – dystrybuanta zmiennej losowej o standardowym rozkładzie normalnym określa, jakie jest prawdopodobieństwo otrzymania odchylenia niższego od d.

Graficzną ilustrację wartości opcji *call* przedstawia rysunek 3.



Rys. 3. Wartość opcji kupna w modelu Blacka–Scholesa
(krzywa opcji kupna zbiega się asymptotycznie z $C = \max[0, S - Xe^{-r_f T}]$)
Ź r ó d ł o: opracowanie na podstawie [2].

Wykorzystując parytet kupna–sprzedaży, otrzymamy wartość *europejskiej opcji sprzedaży* na akcje *nie przynoszące dywidendy*

$$P = Xe^{-r_f T}\left[1 - N\left(\frac{\ln\frac{S}{X} + \left(r_f - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right] - S\left[1 - N\left(\frac{\ln\frac{S}{X} + \left(r_f + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right].$$

2.1. Zmiany wartości aktywów podstawowych

W modelu Blacka–Scholesa zakłada się, że ceny akcji podlegają błądzeniu przypadkowemu. Oznacza to, że w krótkim okresie rozkład zmian cen akcji ma charakter rozkładu normalnego. Z tego wynika, że dla dowolnego momentu w przyszłości ceny akcji mają rozkład logarytmiczno-normalny (zmienna w rozkładzie log-normalnym przybiera jedynie wartości dodatnie), można je modelować procesem stochastycznym Ito. Wariancja aktywów podstawowych wzrasta linowo wraz z czasem.

Wartość aktywów podstawowych (akcji, projektu) S podlega błądzeniu przypadkowemu – zmienia się zgodnie z geometrycznym ruchem Browna:

$$dS = \alpha S dt + \sigma S dz ,$$

gdzie:

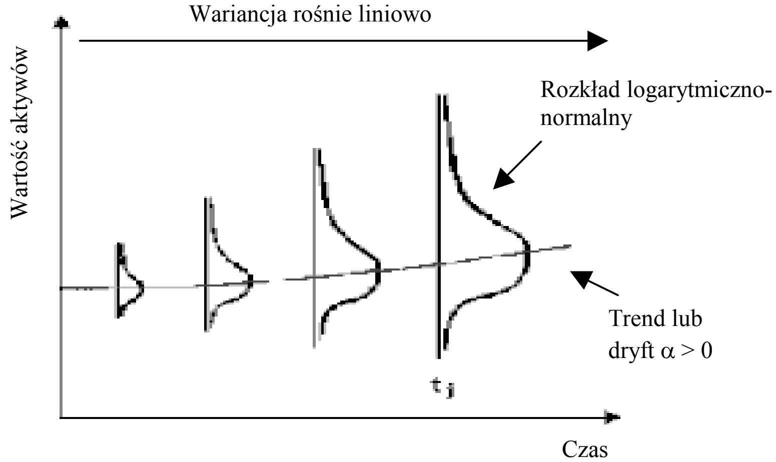
α – parametr oczekiwanej stopy zwrotu z akcji (dryf),

σ – miara zmienności procesu (np. odchylenie standardowe),

$dz = \varepsilon\sqrt{dt}$ – przyrost Wienera,

ε – proces o standardowym rozkładzie normalnym.

Zmiany wartości aktywów podstawowych, np. zmiany cen akcji, zmiany cen surowców, zmiany kosztu inwestycji przebiegające zgodnie z geometrycznym ruchem Browna ilustruje rysunek 4.



Rys. 4. Wartość aktywów modelowana geometrycznym ruchem Browna

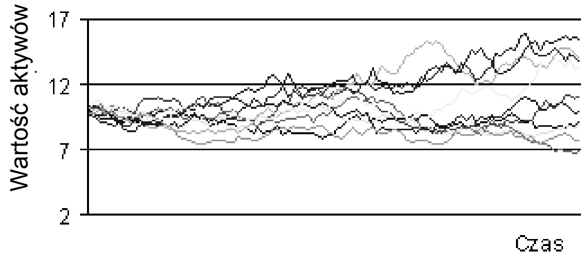
W przypadku opcji rzeczowych oczekiwana stopa zwrotu z projektu μ jest stopą uwzględniającą ryzyko projektu. Odpowiada stopie zwrotu w modelu CAPM [6]. Przez analogię do stopy zwrotu z akcji oczekiwana stopa zwrotu z projektu μ:

$$\mu = \alpha + \delta$$

Zyski kapitałowe Stopa dywidendy

Stopa dywidendy w przypadku opcji rzeczowych może być interpretowana np. jako utrata dochodu związana z odłożeniem uruchomienia projektu, np. przez wejście na rynek konkurencji w czasie, gdy czeka się na sprzyjające warunki uruchomienia projektu, która odbiera przedsiębiorstwu część dochodów z projektu (utrata dochodu, którego wyrzeka się firma w zamian za możliwość niewykonywania opcji).

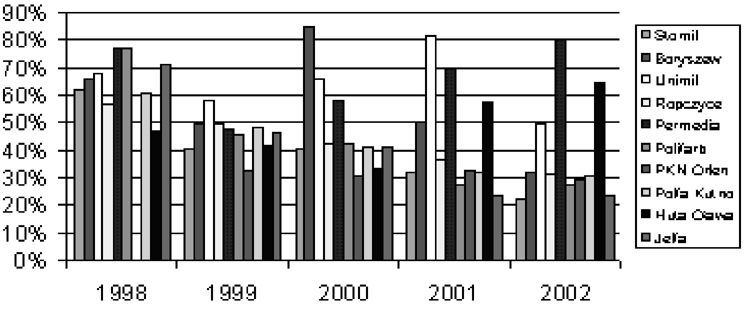
Na rysunku 5 przedstawiono przykładowe trajektorie zmian wartości aktywów podstawowych opisywane geometrycznym ruchem Browna.



Rys. 5. Zmiany wartości aktywów przebiegające zgodnie z geometrycznym ruchem Browna

Model Browna jest powszechnie stosowany również w wycenie opcji rzeczowych.

Miarą zmienności ceny akcji w modelu Blacka–Scholesa jest odchylenie standardowe stopy zwrotu z akcji w skali jednego roku. W modelu Blacka–Scholesa zakłada się, że zmienność mierzona odchyleniem standardowym jest stała w czasie. W rzeczywistości jednak tak nie jest. Na rysunku 6 przedstawiono zmiany odchylenia standardowego (rocznej zmienności) cen akcji spółek branży chemicznej notowanych na WGPW. Z analizy tych zmian wynika, że roczna zmienność cen akcji mierzona odchyleniem standardowym stopy zwrotu zmienia się w czasie, np. dla spółki Boryszew w 1998 roku wynosiła 65%, w 1999 roku 50%, w 2000 roku 85%, w 2001 roku 50%, a w 2002 już tylko 32%. Dlatego zaleca się, aby wyceniając opcje brać pod uwagę dane z krótkich okresów, np. ceny zamknięcia dla danych dziennych z ostatnich 90–180 dni [3].



Rys. 6. Zmiany rocznej zmienności cen akcji spółek branży chemicznej w latach 1998–2002 na rynku polskim

Ważnym problemem w oszacowaniu zmienności jest również dobór miary czasu – czy mierzyć czas w dniach sesyjnych, czy kalendarzowych. Jak zauważa Hull, jednym z czynników wywołujących zmienność jest obrót giełdowy, a nie wyłącznie napływające informacje.

3. Uogólnienia modelu Blacka–Scholesa

W modelu wyceny opcji Blacka–Scholesa zakłada się, że opcje zostały wystawione na akcje, które nie przynoszą dywidendy. Wypłata dywidendy wpływa na wartość rynkową akcji. W dniu ustalenia prawa do dywidendy cena akcji obniża się o wielkość dywidendy przypadającej na akcję. W efekcie zmniejsza się wartość opcji kupna, a zwiększa opcji sprzedaży. W kontekście wyceny opcji dywidenda oznacza redukcję ceny akcji w dniu ustalenia prawa do dywidendy. Jeżeli na przykład oczekiwana wartość dywidendy wynosi 1 dolar na akcję, a w dniu ustalenia prawa do dywidendy cena akcji spada o 80%, to dla wyceny opcji należy przyjąć, że dywidenda wynosi 0,8 dolara [3]. Stosując model Blacka–Scholesa, należy od ceny waloru odjąć wartość bieżącą oczekiwanych dywidend, zdyskontowaną stopą wolną od ryzyka r_f, które będą wypłacone przed wygaśnięciem opcji.

Jeżeli dywidenda byłaby wypłacana w sposób ciągły, to wyceniając opcje na akcje spółki wypłacającej dywidendę o znanej wielkości i stopie równej δ, należałoby zmniejszyć aktualną cenę akcji S do wartości $Se^{-\delta T}$, a następnie wyceniać wartość opcji w taki sam sposób jak w przypadku opcji na akcje nie przynoszące dywidendy (tabela 1). Jeżeli w okresie do wykupu opcji stopa dywidendy nie będzie stała, to formuły można wykorzystać pod warunkiem założenia jako δ np. średniej wartości stopy dywidendy wyrażonej w stosunku rocznym, aby spełnić warunek stałości stopy dywidendy. W praktyce dywidendy nigdy nie są wypłacane w sposób ciągły. Ale na przykład opcje na indeksy akcji, w których stopa dywidendy składa się ze stóp dywidend z akcji wchodzących w skład danego indeksu, można traktować jak aktywa przynoszące dywidendę w sposób ciągły. Podobnie opcje na waluty obce, w których stopa dywidendy jest wolną od ryzyka stopą procentową dla określonej waluty

W wycenie opcji rzeczowych odpowiednikiem dywidendy jest czynnik, który obniża wartość projektu – w zależności od rodzaju opcji może to być np. koszt traconych potencjalnych korzyści, który wynika z odraczania momentu rozpoczęcia produkcji, dochody tracone na skutek działania konkurencji W większości modeli wyceny opcji rzeczowych odpowiednik dywidendy traktuje się analogicznie jak dywidendę wypłacaną w sposób ciągły w wycenie opcji finansowych.

Model wyceny europejskiej opcji kupna Black i Scholes opublikowali w 1973 roku, przyjmując szereg założeń, które w ciągu następnych 10 lat przez innych badaczy zostały osłabione. Modele oparte na modelu Blacka–Scholesa odchodzące od założeń przyjmowanych w tym modelu, przedstawiono w załączonej tabeli. Modele te są omawiane w innych publikacjach. Tabelę opracowano na podstawie źródeł wtórnych.

Wnioski

Uwzględnienie opcji rzeczowych w procesie wyceny wartości przedsiębiorstwa umożliwia wycenę zdolności przedsiębiorstwa do przystosowania się do zmieniających się warunków. Pozwala wyceniać projekty, które w momencie wyceny nie są realizowane, ale mogą być w sprzyjających warunkach. Do wyceny opcji rzeczowych stosuje się metody wyceny finansowych opcji kupna. W warunkach niestabilnej gospodarki, gdy stopy zwrotu i zmienność cen aktywów nie są zbyt stabilne w czasie, należy wyjątkowo ostrożnie dokonywać oszacowań opcji rzeczowych.

Przedstawiony model Blacka–Scholesa i uogólnienia tego modelu określają wartość opcji europejskiej. Opcje rzeczowe to przede wszystkim długoterminowe opcje amerykańskie, które mogą być wykonane w dowolnym terminie do czasu ich wygaśnięcia. Model Blacka–Scholesa wykazuje skłonność do zawyżania wartości opcji *out of the Money* i zaniżania *in the Money*. Opracowane przez innych badaczy modele (uogólnione modele) pozwalają dokonać wyceny opcji rzeczowych przy słabszych założeniach niż w modelu Blacka–Scholesa.

Bibliografia

[1] AMRAM M., KULATILAKA N., *Real Options, Managing Investment in an Uncertain World*, HBS Press, Boston, Massachusetts 1999.
[2] HAUGEN R.A., *Teoria nowoczesnego inwestowania*, WIG Press, Warszawa 1996.
[3] HULL J., *Kontrakty terminowe i opcje. Wprowadzenie*, WIG Press, Warszawa 1997.
[4] LUEHRMAN T., *Strategy as a Portfolio of Real Options*, Harvard Business Review, September/October 1998.
[5] ŁUKANIUK M., *Metodyka wyceny przedsiębiorstw z uwzględnieniem opcji*, praca doktorska, Politechnika Wrocławska, Wrocław 2003.
[6] MACBETH J., MERVILLE L., *Tests of the Black–Scholes and Cox Option Valuation Models*, Journal of Finance, May 1980.
[7] PINDYCK R.S., *Irreversibility, Uncertainty and Investment*, Journal of Economic Literature, September 1991.
[8] SMITHSON Ch.W., SMITH C.W., WILFORD D.S., *Zarządzanie ryzykiem finansowym*, Oficyna Ekonomiczna, Kraków 2000.

[9] TARGIEL K., *Zmienność a ryzyko* [w:] *Modelowanie preferencji a ryzyko*, pod red. T. Trzaskalika, Wydawnictwo Uczelniane Akademii Ekonomicznej, Katowice 1999.
[10] WERON A., WERON R., *Inżynieria finansowa. Wycena instrumentów pochodnych. Symulacje komputerowe, Statystyka rynków*, WNT, Warszawa 1998.
[11] WILIMOWSKA Z., WILIMOWSKI M., *Sztuka zarządzania finansami*. Cz. 1, Wydanie II poprawione, Bydgoszcz, Oficyna Wydawnicza Ośrodka Postępu Organizacyjnego 2001.
[12] WILMOTT P., *Paul Wilmott on Quantitative Finance*, John Wiley & Sons, Chichester et. 2000.

Real option valuation methods – Black–Scholes models

Real option valuation methods used in firm valuation process allow taking into consideration firm's flexibility and its adaptability to environmental changes.

The risk is taken into consideration at an expected rate of return in real option – an expected return rate is related to CAPM model. Similarly to return rate of stocks, an expected rate of return $\mu = \alpha + \delta$ in real option valuation process. Dividend rate in real option valuation could be interpreted as the cost of delay in project starting (an income that is refused in exchange of the possibility of rejecting a given option). The Black–Scholes model describes the pricing of European call option for share without dividend payment.

A standard deviation of yearly return rate of stocks is a risk measure in Black–Scholes model. It is assumed that the variability of stocks is constant during the year. Actually, the variability is changing with time. So, in the paper, it is shown that the variability of stocks at WSE is changing with time and for this reason a short term variability should be taken into account in real option valuation process, i.e., the last 90–180 days. Other models based on the Black–Scholes one that refuse its basic assumptions are also presented.

Keywords: *real options, Black–Scholes models, value of the firm*

Tabela 1

Uogólnienia modelu Blacka–Scholesa

Odejście od założenia	Autor	Postać modelu – wartość europejskiej opcji kupna
Braku dywidendy	Merton (1973)	$C = e^{-\delta T} S^* N \left\{ \frac{\ln \frac{S}{X} + (r_f - \delta + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma \sqrt{T}} \right\} - e^{-r_f T} X^* N \left\{ \frac{\ln \frac{S}{X} + (r_f - \delta + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma \sqrt{T}} \right\}$, gdzie: δ – stała stopa dywidendy
Braku podatków i kosztów transakcyjnych	Ingersoll (1976)	$C = e^{-\delta(1-\tau)T} S^* N \left\{ \frac{\ln \frac{S}{X} + \left((r-\delta)(1-\tau) + \frac{\sigma^2}{2} \right) T}{\sigma \sqrt{T}} \right\} - e^{-(1-\tau)T} X^* N \left\{ \frac{\ln \frac{S}{X} + \left((r-\delta)(1-\tau) - \frac{\sigma^2}{2} \right) T}{\sigma \sqrt{T}} \right\}$, gdzie: τ – stopa podatkowa, δ – koszty transakcji
Stałych stóp procentowych	Merton (1973)	$C = S^* N \left\{ \frac{\ln \frac{S}{X} - \ln B(T) + \left(\frac{\hat{\sigma}^2}{2} \right) T}{\hat{\sigma} \sqrt{T}} \right\} - B(T) X^* N \left\{ \frac{\ln \frac{S}{X} + - \ln B(T) + \left(\frac{\hat{\sigma}^2}{2} \right) T}{\hat{\sigma} \sqrt{T}} \right\}$ $B(T)$ – wartość wolnej od ryzyka obligacji zerokuponowej (zdyskontowanej, bez wypłaty odsetek) o terminie wykupu równym terminowi wygaśnięcia opcji, $\hat{\sigma}$ – wariancja ceny akcji i stopy dyskontowej obligacji.
Działania rynku w sposób ciągły i cen akcji zmieniających się w sposób ciągły	Merton (1976) Cox i Ross (1976)	Modelowanie za pomocą funkcji skokowych (połączenie skoków i dyfuzji). Zakładając ograniczoną wielkość skoków i ich rozkład log-normalny: $C = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda(1+k)T} [\lambda(1+k)T]^n}{n!} S^* N \left\{ \frac{\ln \frac{S}{X} + \left(\hat{r} + \frac{\hat{\hat{\sigma}}^2}{2} \right) T}{\hat{\hat{\sigma}}^2 \sqrt{T}} \right\} - e^{rT} X^* N \left\{ \frac{\ln \frac{S}{X} + + \left(\hat{r} + \frac{\hat{\hat{\sigma}}^2}{2} \right) T}{\hat{\hat{\sigma}}^2 \sqrt{T}} \right\}$ λ – częstotliwość skoków, K – średnia wielkość skoku wyrażona w stosunku do ceny akcji, $R = r - \lambda + \{n/[\ln(1+k)]\}/T$, $\hat{\hat{\sigma}}^2 = \hat{\sigma}^2 + n\sigma_j^2$, σ_j^2 – wariancja rozkładu skoków.
Rozkład końcowych cen akcji jest log-normalny	Jarrow i Rudd (1982)	Zmiany cen przebiegają w sposób dyfuzyjny, ale niekoniecznie prowadzą do rozkładu log-normalego 1987 r. – uogólnienie modelu Blacka–Scholesa dopuszczające możliwość, by sama zmienność cen podlegała procesowi stochastycznemu.

Źródło: opracowanie własne na podstawie [2], [3], [5], [8], [10]–[12].