B A D A N I A   O P E R A C Y J N E   I   D E C Y Z J E

Nr 1 2005

Zofia WILIMOWSKA*
Małgorzata ŁUKANIUK**

DWUMIANOWY MODEL WYCENY OPCJI RZECZOWYCH

Zastosowanie drzew dwumianowych do wyceny opcji rzeczowych umożliwia śledzenie zmian wartości aktywów w odpowiednich okresach czasu i podejmowanie decyzji stosownie do wyników obserwacji. W artykule przedstawiono model dwumianowy w wycenie opcji rzeczowych oraz jego zastosowanie do wyceny opcji rzeczowych na przykładzie opcji odroczenia i opcji zaniechania dla hipotetycznej kopalni. Kopalnia może odraczać rozpoczęcie wydobycia surowca w ciągu trzech najbliższych lat. Źródłem niepewności w analizowanym przykładzie jest cena surowca, a przez to przyszłe przepływy pieniężne.

Słowa kluczowe: *opcje rzeczowe, model dwumianowy, wartość spółki*

1. Wprowadzenie

Przyjęcie jako podstawowego celu działania przedsiębiorstwa dążenia do maksymalizacji jego wartości rynkowej, a w konsekwencji do wzrostu zamożności właścicieli firmy sprawia, że wartość przedsiębiorstwa i jej pomiar stają się jednym z ważniejszych aspektów zarządzania. Szacowanie wartości przedsiębiorstwa powinno służyć świadomemu jej kształtowaniu w procesie formułowania strategii oraz w podejmowaniu bieżących decyzji operacyjnych.

Niepewność towarzysząca działalności gospodarczej stwarza konieczność adaptacji i reakcji ze strony przedsiębiorstw na zmiany warunków. Żadna ze stosowanych obecnie metod wyceny nie przypisuje wartości aktywnemu zarządzaniu przedsiębiorstwem w zmieniających się warunkach, żadna nie uwzględnia możliwości

* Instytut Organizacji i Zarządzania, Politechnika Wrocławska, ul. Smoluchowskiego 25, 50-372 Wrocław, e-mail: Zofia.Wilimowska@pwr.wroc.pl

** Instytut Organizacji i Zarządzania, Politechnika Wrocławska, ul. Smoluchowskiego 25, 50-372 Wrocław.

zmian warunków gospodarczych po dniu wyceny i ich wpływu na wartość przedsiębiorstwa.

Zastosowanie metod wyceny opcji rzeczowych w procesie wyceny wartości przedsiębiorstwa daje możliwość uwzględnienia wśród czynników wpływających na jego wartość rynkową czynnika charakteryzującego jego elastyczność – możliwość adaptacji przedsiębiorstwa do zmieniających się warunków.

Szybkość zmian zachodzących we współczesnej gospodarce wymaga równie szybkiego reagowania na te zmiany. Ponieważ z reguły decyzje podejmowane dziś przynoszą efekty dopiero w przyszłości, konieczne jest wcześniejsze oszacowanie efektów decyzji przez symulowanie ich skutków.

Osiągnięcia współczesnej technologii IT (Information Technology) ułatwiają proces wyceny wartości przedsiębiorstwa.

2. Modele dwumianowe

Model dwumianowy, zwany metodą drzewka dwumianowego – zaproponowany po raz pierwszy przez W. Sharpe'a (1978), kojarzony przede wszystkim z pracą J. Coxa, S. Rossa i M. Rubinsteina [1]

W metodzie dwumianowej czas pozostały do wygaśnięcia opcji dzieli się na dyskretne przedziały i przyjmuje się, że w każdym przedziale cena aktywa S zmienia się dwumianowo – może wzrosnąć do wartości Su (z prawdopodobieństwem p) lub obniżyć się do wartości Sd (z prawdopodobieństwem 1– p), gdzie $u > 1$, $d < 1$. Mając zbiór cen akcji w postaci drzewka, można wycenić opcję przeprowadzając rachunek wstecz, począwszy od daty wygaśnięcia. Wykorzystując obserwację Blacka i Scholesa, że z akcji i opcji można utworzyć portfel bezpieczny, obliczenia wykonuje się w kierunku początku drzewa od chwili T do $T-1$, dyskontując w tym przedziale czasowym wartość portfela po stopie procentowej wolnej od ryzyka. Procedurę powtarza się aż do chwili wystawienia opcji. Zaletą tego modelu jest możliwość stosowania go do różnego rodzaju aktywów aktywów, opcji i w różnych warunkach rynkowych. Jest ona często stosowana do wyceny opcji amerykańskich oraz opcji złożonych.

2.1. Analiza drzew dwumianowych

Drzewo dwumianowe przedstawia poziomy cen, które może przyjąć akcja (aktywo podstawowe) w czasie trwania opcji. W modelu drzew dwumianowych zakłada się, że zmiany cen akcji składają się z dużej liczby niewielkich zmian dwumianowych. Założenie to po raz pierwszy zastosowali Cox, Ross i Rubinstein [1].

Metoda polega na podzieleniu czasu do wygaśnięcia opcji na określoną liczbę krótkich okresów Δt; w każdym z przedziałów czasu Δt cena akcji może zmienić się do jednej z dwóch wartości: Su z prawdopodobieństwem p lub SD z prawdopodobieństwem 1 – p. Przyjęli, że $u > 1$, $d < 1$, zatem Su oznacza proporcjonalny wzrost ceny akcji w przedziale Δt, Sd zaś proporcjonalny spadek ceny akcji w przedziale Δt. Zatem $u - 1$ jest aprecjacją ceny akcji, zaś $1 - d$ – deprecjacją.

Przyjmując założenie o powszechnej obojętności inwestorów względem ryzyka, oczekiwana stopa zwrotu z akcji w okresie Δt musi być równa stopie wolnej od ryzyka r_f. Wartość akcji na koniec okresu Δt wynosi zatem $Se^{r\Delta t} = \mathrm{p}Su + (1-\mathrm{p})Sd$, czyli $e^{r\Delta t} = \mathrm{p}u + (1-\mathrm{p})d$. Odchylenie standardowe ceny akcji w przedziale Δt równa się $\sigma\sqrt{\Delta t}$, wariancja tej zmiany ceny jest więc równa $S^2\sigma^2\Delta t$, zatem:

$$S^2\sigma^2\Delta t = \mathrm{p}S^2u^2 + (1-\mathrm{p})S^2d^2 - S^2[\mathrm{p}u + (1-\mathrm{p})d]^2,$$

$$\sigma^2\Delta t = \mathrm{p}u^2 + (1-\mathrm{p})d^2 - [\mathrm{p}u + (1-\mathrm{p})d]^2.$$

Przy założeniu, że $u = \frac{1}{d}$ [1, 2] i gdy Δt jest dostatecznie małe, otrzymujemy

$$\mathrm{p} = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}, \quad u = e^{\sigma\sqrt{t}}, \quad d = e^{-\sigma\sqrt{t}}.$$

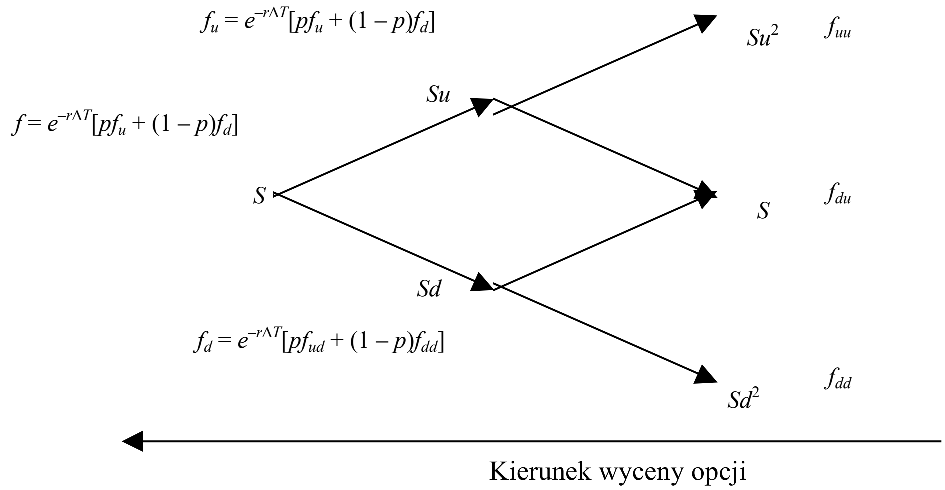
W chwili $t = 0$ cena akcji jest znana i jest równa S. W chwili Δt możliwe są dwa poziomy ceny: Su i Sd, w momencie $2\Delta t$: Su^2, S lub Sd^2. Uogólniając, w chwili $i\Delta t$ istnieje $i + 1$ możliwych poziomów cen Su^jd^{i-j}, $j = 0, 1, ..., i$. Ponieważ $u = 1/d$, np. $Su^2d = Su$, drzewo podlega rekombinacji, co oznacza, że wzrost ceny po spadku prowadzi do tego samego węzła co spadek ceny występujący po wzroście.

Opcje wycenia się zaczynając od węzłów końcowych (chwila T), cofając się do początku. W warunkach powszechnej obojętności względem ryzyka wartość opcji w każdym węźle w chwili $T - \Delta t$ można obliczyć jako wartość oczekiwaną w chwili T, zdyskontowaną po r_f. W przypadku opcji amerykańskich w każdym węźle trzeba sprawdzić, co jest korzystniejsze: wcześniejsze wykonanie opcji czy posiadanie jej przez kolejny okres Δt. Cenę opcji oblicza się zaczynając od węzłów końcowych, kierując się w stronę węzła początkowego (rysunek 1).

W przypadku opcji amerykańskich we wcześniejszych węzłach niż końcowe wartość opcji jest wartością większą z dwu wartości:

• wartości opcji, gdyby opcja została wykonana natychmiast, czyli wartości wewnętrznej,

• wartości opcji przy założeniu, że nie zostanie ona wykonana przez następny okres Δt. Wartość jest wówczas równa wartości oczekiwanej opcji na koniec okresu Δt, zdyskontowanej do chwili obecnej.



Rys. 1. Wartość opcji europejskiej (f) i ceny akcji (S) w drzewie dwumianowym dwuokresowym
Źródło: opracowanie własne.

2.2. Ujęcie algebraiczne dla amerykańskiej opcji sprzedaży

Czas trwania został podzielony na N przedziałów o długości Δt. Oznaczmy wartość opcji w chwili $i\Delta t$ przy cenie akcji $Su^j d^{i-j}$, gdzie $0 \le i \le N$, $0 \le j \le N$ jako f_{ij} – wartość opcji w węźle (i, j) i wówczas: $f_{Nj} = \max\,[X - Su^j d^{N-j}, 0]$. Prawdopodobieństwo przejścia z węzła (i, j) w chwili $i\Delta t$ do węzła $(i + 1, j + 1)$ w chwili $(i + 1)\Delta t$ jest równe p, zaś prawdopodobieństwo przejścia z węzła (i, j) w chwili $i\Delta t$ do węzła $(i + 1, j)$ w chwili $(i + 1)\Delta t$ jest równe 1 – p. Zakładając, że opcja nie zostanie wykonana wcześniej, w warunkach powszechnej obojętności względem ryzyka, otrzymujemy dla $0 \le i \le N - 1$ oraz $0 \le j \le i$.

$$f_{ij} = e^{-r\Delta t}[\mathrm{p}f_{i+1,j+1} + (1-\mathrm{p})f_{i+1,j}]\,.$$

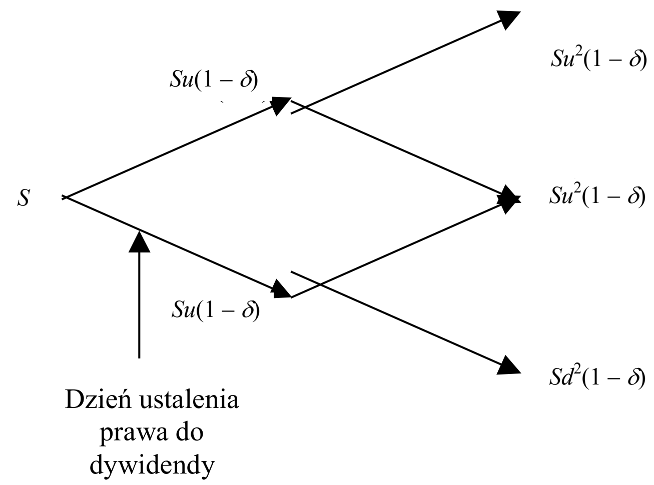
Uwzględniając możliwość wcześniejszego wykonania opcji, wartość f_{ij} należy porównać z wewnętrzną wartością opcji:

$$f_{ij} = \max\,\{X - Su^j d^{i-j}, e^{-r\Delta t}[\mathrm{p}f_{i+1,j+1} + (1-\mathrm{p})f_{i+1,j}]\}\,.$$

Ponieważ obliczenia rozpoczynają się w czasie T i przebiegają wstecz, wartość w chwili $i\Delta t$ oznacza więc możliwość przedterminowego wykonania opcji zarówno w tym, jak i każdym następującym po nim węźle. Wynik zbliża się do dokładnej wartości opcji sprzedaży wraz ze zmniejszaniem Δt. W praktyce wystarczy przyjąć $N = 30$ [2].

2.3. Wykorzystanie drzew dwumianowych do wyceny opcji aukcyjnych spółki wypłacającej dywidendę

Jeżeli dywidenda o znanej stopie δ ma być wypłacona w danym momencie w przyszłości, to drzewo przyjmie postać przedstawioną na rysunku 2.



Rys. 2. Drzewo dwumianowe, dywidenda o znanej stopie δ, wypłacana w określonym dniu przed wyceną opcji
Źródło: opracowanie własne.

Jeżeli chwila $i\Delta t$ przypada przed momentem wypłaty dywidendy, to cena akcji wynosi Su^jd^{i-j} dla $j = 0, 1,..., i$. Jeśli chwila $i\Delta t$ przypada po dniu ustalenia prawa do dywidendy, to ceny akcji w odpowiednich węzłach wyniosą $S(1 - \delta)u^jd^{i-j}$, ponieważ wypłata dywidendy powoduje zmniejszenie ceny akcji. Jeśli w okresie ważności opcji przypada więcej niż jedna wypłata dywidendy, a całkowitą stopę dywidend wypłacanych między chwilą obecną a czasem $i\Delta t$ oznaczymy jako δ_i, to cena akcji w chwili $i\Delta t$ wynosi $S(1 - \delta_i)\,u^jd^{i-j}$.

W rzeczywistości częściej znana jest nominalna wartość dywidendy niż jej stopa. W tej sytuacji drzewo nie podlega rekombinacji i liczba węzłów wzrasta. Problem można uprościć, przyjmując że cena akcji składa się z dwóch elementów: części obarczonej ryzykiem S^* oraz części stanowiącej wartość bieżącą wszystkich przyszłych dywidend. Dzięki temu otrzymujemy drzewo podlegające rekombinacji.

3. Zastosowanie modelu dwumianowego w wycenie opcji rzeczowych

Aby zilustrować zastosowanie modelu dwumianowego do wyceny opcji rzeczowych, posłużymy się hipotetycznym przykładem opcji odroczenia. Kopalnia może odraczać rozpoczęcie wydobycia surowca w ciągu trzech najbliższych lat. Nakłady potrzebne, aby rozpocząć wydobycie wynoszą 100 000 zł. Załóżmy, że pierwszy strumień gotówki CF (Cash Flow) nastąpi po roku od poniesienia nakładów. Kopalnia może wydobywać rocznie 10 000 ton surowca, ponosząc koszty stałe w wysokości 250 000 zł rocznie. Jednostkowy koszt zmienny wydobycia tony surowca wynosi 100 zł. Obecna cena wydobywanego surowca to 200 zł za tonę, a zmienność ceny surowca w ciągu roku kształtuje się na poziomie 25%. Okres dzierżawy złoża wynosi 5 lat. Stopa wolna od ryzyka wynosi 5%. Źródłem niepewności w analizowanym przykładzie jest cena surowca, a przez to niepewne stają się przyszłe przepływy pieniężne.

Tabela 1

Dane i oznaczenia

Dane	Oznaczenie	Wartość
Cena surowca	S	200 zł
Nakłady inwestycyjne	X	1 000 000 zł
Czas dzierżawy	t	5 lat
Zmienność cen	σ	25,0%
Stopa wolna od ryzyka	r_f	5,0%
Krok czasowy	Δt	1 rok
$= \exp[\sigma(\Delta t)^{.5}]$	u	1,28
$= 1/d$	d	0,78
$= [(1 + r_f - q) - d]/(u - d)$	P	0,44
$= 1 - \mathrm{p}$	q	0,56
$= \mathrm{p}[\exp(-r_f \Delta t)]$	d_U	0,42
$= \mathrm{q}[\exp(-r_f \Delta t)]$	d_D	0,53

Siatka cen surowca

Aktualną cenę surowca mnożymy w kolejnych krokach czasowych przez 1,28 dla wzrostów i 0,78 dla spadków.

					698,07
				543,66	
			423,40		423,40
		329,74		329,74	
	256,81		256,81		256,81
200,00		200,00		200,00	
	155,76		155,76		155,76
		121,31		121,31	
			94,47		94,47
				73,58	
					57,30
0	1	2	3	4	5

Czas

Rys. 3. Siatka cen surowca w kolejnych latach

Siatka strumieni pieniężnych CF

Niepewność co do przyszłej ceny surowca sprawia, że przyszłe przepływy pieniężne z wydobycia surowca również są niepewne. CF generowane przez kopalnię prowadzącą wydobycie wynoszą:

CF = (cena surowca – jednostkowy koszt zmienny) * wielkość wydobycia – koszty stałe.

Jeśli po roku cena surowca wzrośnie do 256,81 zł za tonę, a kopalnia będzie prowadzić wydobycie, to przepływy pieniężne w pierwszym roku wyniosą

$$CF_u = (256{,}81 \text{ zł} - 100 \text{ zł})(10\,000) - 250\,000 \text{ zł} = 1\,318\,051 \text{ zł}.$$

Podobnie, jeśli cena surowca spadnie w okresie pierwszym do 155,76 zł, a kopalnia będzie prowadzić wydobycie, wówczas

$$CF_D = (155{,}76 \text{ zł} - 100 \text{ zł})(10\,000) - 250\,000 \text{ zł} = 307\,602 \text{ zł}.$$

W taki sam sposób obliczono wartości CF w kolejnych latach. W t = 0 CF jest równe zero, bo przedsiębiorstwo dopiero rozpoczyna produkcję. Otrzymane wyniki przedstawiono na rysunku 4.

					5 730 686
				4 186 564	
			2 984 000		2 984 000
		2 047 443		2 047 443	
	1 318 051		1 318 051		1 318 051
0		750 000		750 000	
	307 602		307 602		307 602
		–36 939		–36 939	
			–305 267		–305 267
				–514 241	
					–676 990
0	1	2	3	4	5
					Czas

Rys. 4. Siatka wartości CF

Wartość bieżąca przyszłych CF

Rozpoczynając od ostatniego roku (rok 5), obliczamy PV w każdym kolejnym węźle. W roku 5, w najwyższym węźle wartość CF wynosi 5 730 686 zł. Ponieważ rok 5 jest ostatnim rokiem wydobycia (dzierżawy złoża), wartość bieżąca przyszłych CF w 5 roku jest więc równa dochodowi wytworzonemu w tym roku przez przedsiębiorstwo. Analogicznie PV w pozostałych węzłach roku 5 jest równa wartości CF w roku 5 .

Wartość bieżąca projektu w węźle czwartym składa się dochodu osiągniętego w roku 4: CF = 4 186 564 zł oraz wartości dochodów możliwych do otrzymania w przyszłości, czyli w roku 5. CF = 5 730 686 zł, gdy ceny surowca wzrosną lub CF = 2 984 000 zł, gdy ceny surowca w 5 roku spadną, zatem:

$PV_{UUUU} = đ_U$ (5 730 686 zł)+ $đ_D$(2 984 000 zł) + 4 186 564 zł,

PV_{UUUU} = (0,42) (5 730 686 zł)+ (0,53)(2 984 000 zł) + 4 186 564 zł = 8 168 946 zł.

W taki sam sposób obliczymy PV w pozostałych węzłach roku 4. Przykładowo dla roku 4 w węźle po trzech zwyżkach i jednym spadku ceny otrzymujemy:

$PV_{UUUD} = đ_U$ (2 984 000 zł)+ $đ_D$(1 318 051 zł) + 2 047 443 zł,

PV_{UUUD} = (0.42) (2 984 000 zł)+ (0.53) (1 318 051 zł) + 2 047 443 z ł= 3 995 030 zł.

Analogicznie obliczany jest PV w roku 3. PV w węźle po jednym wzroście i dwóch spadkach ceny surowca wynosi:

$PV_{UDD} = đ_U$(1 463 422 zł) + $đ_D$(–72 076 zł) + 307 602 zł,

PV_{UDD} = (0,42)(1 463 422 zł) + (0,53)(–72 076 zł) + 307 602 zł = 878 531 zł.

Obliczając PV dla roku $t = 3$, bierze się pod uwagę dochód osiągnięty przez przedsiębiorstwo w roku 3 i wszystkie oczekiwane w przyszłości CF. W obliczeniach korzystamy z PV roku 4, ponieważ w tej wartości są zawarte wszystkie przyszłe CF poczynając od roku 4.

Podobnie obliczono PV w pozostałych węzłach. Otrzymane wyniki przedstawiono na rysunku 5.

NPV projektu w roku $t = 0$ jest równe PV wszystkich przyszłych CF pomniejszonej o nakłady inwestycyjne w wysokości 1 000 000. Wartość bieżąca projektu wynosi

NPV= 3 235 730 zł – 1 000 000 zł = 2 235 730 zł.

					5 730 686
				8 168 946	
			8 522 504		2 984 000
		7 609 883		3 995 030	
	5 978 027		3 764 441		1 318 051
3 235 730		2 787 581		1 463 422	
	1 395 129		878 531		307 602
		–137 293		–72 076	
			–871 863		–305 267
				–1 003 402	
					–676 990
0	1	2	3	4	5

Czas

Rys. 5. Siatka wartości bieżącej przyszłych CF

Wartość opcji odroczenia

Wydobycie można rozpocząć w dowolnym momencie w ciągu trzech lat. Mamy tu więc do czynienia z trzyletnią amerykańską opcją *call*. Aby obliczyć wartość opcji odroczenia, korzystamy z siatki wartości bieżącej przyszłych CF.

Wartość opcji w $t = 3$ w węźle po trzech kolejnych wzrostach cen surowca: jeśli przedsiębiorstwo wykona opcję, czyli poniesie nakłady i rozpocznie wydobycie, to otrzyma pierwszy CF w roku 4, więc wartość opcji w tym węźle wynosi max 0 i

$C_{UUU=}$(0,42)(8 168 946 zł) + (0,53)(3 995 030 zł) – 1 000 000 zł = 4 538 504 zł.

W węźle w roku $t = 3$ po trzech spadkach cen opcja jest *out of the money*, więc nie zostanie wykonana, zatem jej wartość w tym węźle wynosi 0.

Analogicznie obliczamy wartość w pozostałych węzłach. Ponieważ jest to opcja amerykańska, sprawdzamy możliwość wcześniejszego wykonania w każdym węźle. Przykładowo dla roku 2 po dwóch wzrostach cen wartość „żywej” opcji wynosi:

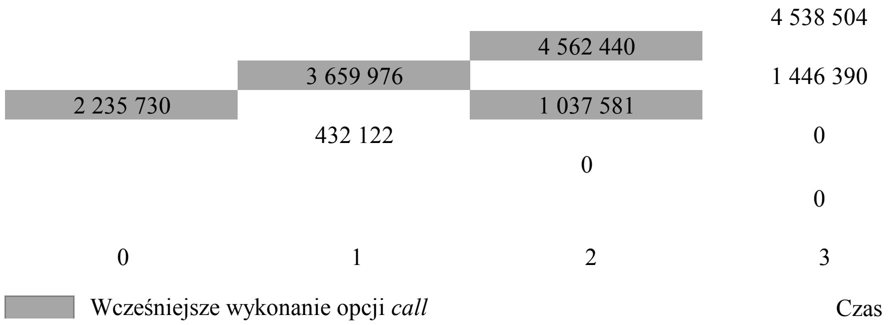
- wartość niewykonanej opcji = (0,41)(4 538 504 zł) + (0,53)(1 446 390 zł) = 2 663 623 zł,

• wartość wcześniejszego wykonania opcji = $PV_{UU} - CF_{UU} - X$ = 7 609 883 zł – 2 047 443 zł – 1 000 000 zł = 4 562 440 zł.

Wykonując opcję w roku 2 po dwóch wzrostach cen od wartości PV_{UU}, należy odjąć nakłady inwestycyjne oraz dochód CF_{UU} wytworzony w roku 2, ponieważ kopalnia przynosi dochody dopiero po roku od poniesienia nakładu.

W tym węźle wartość wcześniejszego wykonania jest większa niż wartość zachowanej opcji, opcja powinna więc zostać wykonana, czyli należy rozpocząć wydobycie.

Podobnie obliczono wartości opcji dla pozostałych węzłów (rysunek 6).



Rys. 6. Siatka wartości opcji odroczenia

Wycena opcji zaniechania

Załóżmy że wydobycie rozpoczęto w roku 0 i można je zaniechać w dowolnym momencie w czasie dzierżawy złoża. Koszt zamknięcia kopalni wynosi 200 000 zł.

Obliczając wartość opcji, korzystamy z siatki PV. Zaczynamy od roku 5. Ponieważ jest to opcja amerykańska, w każdym węźle sprawdzamy wartość korzyści z możliwości wcześniejszego wykonania opcji. Otrzymane wyniki przedstawiono na rysunku 7.

Przykładowe obliczenia

W czasie $t = 5$ w węźle po pięciu spadkach cen CF=-676 990 zł wartość opcji *put* wynosi

$$P_{DDDDD} = -(-676\,990 \text{ zł}) - 200\,000 \text{ zł} = 476\,990 \text{ zł}.$$

W roku 4 w węźle po trzech spadkach i jednym wzroście cen wartość niewykonanej opcji *put*:

• wartość opcji = (0,42)(0 zł) + (0,53)(105 267 zł) = 56 292 zł,

• wartość wcześniejszego wykonania = –(–72 076 zł) – 200 000 zł = –127 924 zł.

Wcześniejsze wykonanie opcji w tym węźle nie jest korzystne.

W $t = 0$ nie jest możliwe zaniechanie, ponieważ nie byłoby inwestycji.

Wartość opcji zaniechania wynosi 113 499 zł.

					0
				0	
			0		0
		0		0	
	8 608		0		0
113 499		16 098		0	
	205 539		30 103		0
		371 821		56 292	
			671 863		105 267
				803 402	
					476 990
0	1	2	3	4	5 Czas

Wcześniejsze wykonanie opcji

Rys. 7. Siatka wartości opcji zaniechania

Wartość projektu z opcją odroczenia i zaniechania

Rozważmy teraz sytuację, kiedy wydobycie można rozpocząć w dowolnym momencie na przestrzeni 3 lat, a jednocześnie kopalnia ma możliwość zaniechania wydobycia w dowolnym momencie w ciągu 5 lat.

Podobnie jak dotychczas, zaczynamy od roku 5 i cofamy się do chwili obecnej korzystając aż do roku 3 z siatki dla opcji *put*.

W roku 3 są dwie możliwe sytuacje:

• nie rozpoczęto jeszcze wydobycia, czy powinno nastąpić to teraz? (czy wykonać opcję *call*?),

• kopalnia prowadzi wydobycie, czy powinno ono zostać zaniechane? (czy wykonać opcję *put*?).

					0
			4 538 504	0	
		4 562 440	0		0
	3 668 584	0	1 446 390	0	
2 349 229	8 608	1 053 679	0		0
113 499	438 826	16 098	0	0	
	205 539	0	30 103		0
		371 821	0	56 292	
			671 863		105 267
				803 402	
					476 990
0	1	2	3	4	5 Czas

Wcześniejsze wykonanie opcji *put*

Łączna wartość obu opcji

Rys. 8. Siatka wartości opcji odroczenia i zaniechania

Jeśli wykonamy opcję *call* w roku 3, to otrzymamy dochód równy

$$\text{wcześniejsze wykonanie opcji } call = PV_3 - X + \text{wartość opcji put.}$$

Przykładowo wartość opcji *call* w $t = 2$ po jednym wzroście i jednym spadku wynosi 1 053 679 zł zamiast 1 037 581 zł dla opcji *call*, ponieważ wartość wcześniejszego wykonania została podwyższona o wartość opcji *put* równej 16 098 zł.

Łączna wartość opcji wynosi 2 349 229 zł i jest sumą wartości obu opcji *put* i *call*. Tak się stało w tym przypadku, ponieważ czas optymalnego wykonania opcji *call* przypada w $t = 0$. Nie zawsze tak jest, że łączna wartość opcji jest sumą obu opcji. Jeśli wcześniejsze wykonanie opcji *call* nie jest optymalne w czasie $t = 0$, to całkowita wartość projektu z opcjami odroczenia i zaniechania będzie niższa niż suma wartości obu opcji obliczanych oddzielnie. Ilustrują to przedstawione w tabeli 2 przykładowe wartości opcji, obliczone dla różnych aktualnych poziomów cen surowca.

Tabela 2

Przykładowe wartości opcji rzeczowych *call* i *put*

Cena bieżąca	Wartość projektu bez opcji	Wartość opcji *call*	Wartość opcji *put*	Wartość obu opcji jednocześnie
180	1 372 868	1 372 868	164 788	1 537 657
160	510 007	813 751	283 939	835 753
140	–352 854	391 412	443 021	428 489
120	–1 215 715	169 819	747 715	172 881

Ź r ó d ł o: opracowanie własne.

Wnioski

Zastosowanie drzew dwumianowych do wyceny opcji rzeczowych pozwala dokonać wartościowego oszacowania zdolności przedsiębiorstwa do przystosowywania się do zmieniających się warunków jego działalności. Można bowiem śledzić zmiany wartości aktywów w odpowiednich okresach czasowych w zależności od zaistniałych warunków i stosownie do wyników obserwacji podejmować decyzje. Umożliwia to niejako interaktywną opcyjną wycenę wartości przedsiębiorstwa. Przez swój zalgorytmizowany proces obliczania wartości opcji model ten daje możliwość stosowania technik komputerowych, które zwiększają szybkość obliczeń oraz ułatwiają podejmowanie decyzji.

Bibliografia

[1] COX J.C., ROSS S.A., RUBINSTEIN M., *Option Pricing: A Simplified Approach*, Journal of Financial Economics, 1979, nr 7.
[2] HULL J., *Kontrakty terminowe i opcje. Wprowadzenie*, WIG Press, Warszawa 1997.
[3] WERON A., WERON R., *Inżynieria finansowa*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1998.

Binomial model of real option valuation

Real option valuation methods used in firm valuation process allow taking into consideration firm's flexibility and its adaptability to environmental changes.

In the binomial tree model it is assumed that stock price changes are composed of a great number of small binomial changes. This assumption was first used by Cox, Ross and Rubinstein. In the method, the time period to expiration date is divided into small periods of time Δt. In each period of time Δt share price can change to one of the two values: Su or Sd. Assuming that $u > 1$, $d < 1$, then Su means share price increasing and Sd decreasing. If the probability of share price increasing is equal to p, then the probability of share price decreasing is equal 1– p.

In this paper, a binomial model in real option valuation is presented and its application to postponement and giving up option pricing is shown by the example of a hypothetic mining firm. The firm can postpone the mining of raw material for three years. The price of raw material is the source of uncertainty that influences uncertainty of future cash flows.

The binomial tree method implementation to real option valuation allows investigation of the assets changing in particular periods of time and enables decisions making depending on the effects of observation. It makes the process of firm valuation more interactive, optional. Its numerical character of calculation allows using computer techniques, which makes the decision processes easier.

Keywords: *real options, binomial model, value of the firm*